Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie

Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Schuljahr 2020/2021

Fach	**Mathematik (A)**
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	**06. Mai 2021**
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	**Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt zu den Wahlmöglichkeiten.**
Erwartungs-horizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	Soll
1	40
2	30
3	30
Summe[1]:	70

[1] Jeder Prüfling bearbeitet nur eine der beiden Aufgaben Nr. 2 oder Nr. 3

1 Funktionsuntersuchung /40

Seit dem Jahr 2000 wird die Besucherzahl eines Museums regelmäßig erfasst und kann für den Zeitraum vom Jahr 2000 bis zum Jahr 2020 näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion f mit:

$f(x) = -0{,}02x^4 + 9x^2 + 1800$, $x \in \mathrm{IR}$.

Dabei gibt x die Zeit in Jahren an, wobei $x = 0$ dem Jahr 2000 entspricht.
Die Anzahl der Besucher wird durch $f(x)$ angegeben.

1.1 Geben Sie einen Definitionsbereich für f an, der im Sachzusammenhang sinnvoll ist. **/2**

1.2 Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle. **/2**
Hinweis: Runden Sie auf ganze Zahlen!

x	0	5	10	15	20
$f(x)$					

1.3 Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Besucherzahl zwischen dem Jahr 2000 und dem Jahr 2020 zu keinem Zeitpunkt Null betrug. **/6**

1.4 Berechnen Sie das Jahr, in dem die Besucherzahl am höchsten war. **/8**
Geben Sie die höchste Besucherzahl an.

1.5 Zeichnen Sie den Graphen von f unter Verwendung aller bisher ermittelten Punkte in das **Koordinatensystem auf der folgenden Seite**. **/3**

1.6 Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P_1\,(5|f(5))$ und $P_2\,(15|f(15))$. **/4**
Ermitteln Sie den Anstieg der Geraden g und beurteilen Sie diesen im Sachzusammenhang.
Zeichnen Sie die Gerade g in das **Koordinatensystem auf der folgenden Seite**.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

1.7 Im Jahr 2010 ($x = 10$) wurde die Vermutung aufgestellt, die Zunahme der Besucher würde in Zukunft linear erfolgen. **/5**
Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt P_3 $(10|f(10))$.
Berechnen Sie, welche Besucherzahl sich im Jahr 2020 ergeben hätte, wenn sich die Zunahme ab 2010 wie durch t beschrieben entwickelt hätte.

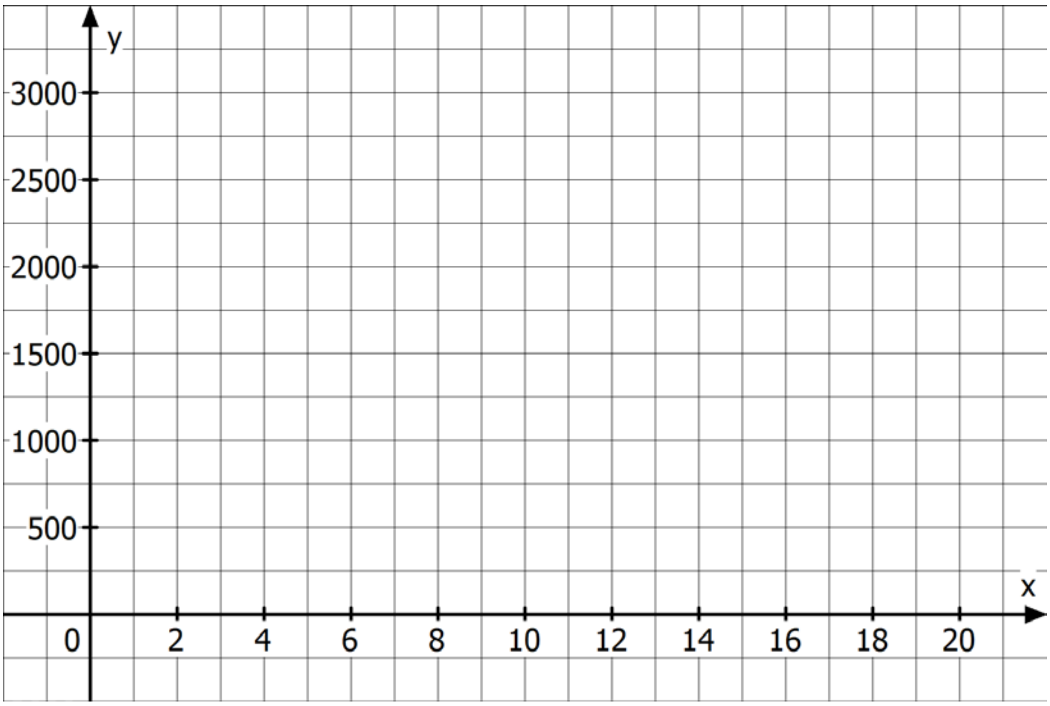
1.8 Man vermutet, dass bei geringeren Eintrittspreisen die Besucherzahlen ab dem Jahr 2000 größer gewesen wären. Im Jahr 2010 ($x = 10$) hätten dann 2800 Personen das Museum besucht. Die Besucherzahlen für den Zeitraum von 2000 bis 2020 hätten dann näherungsweise beschrieben werden können durch die Funktion h mit: **/3**

$h(x) = -0{,}02x^4 + ax^2 + 1800.$

Ermitteln Sie den Wert des Parameters a.
[Zur Kontrolle: $a = 12$]

1.9 Untersuchen Sie folgende Behauptung rechnerisch: **/7**
Wenn sich die Besucherzahl gemäß der Funktion h entwickelt hätte, dann wäre die Besucherzahl im Jahr 2010 ($x = 10$) am stärksten gestiegen.

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.5 und 1.6



2 Integralrechnung /30

Bei der Fahrt mit einem Versuchsfahrzeug wurde in einem bestimmten Streckenabschnitt ständig die Geschwindigkeit erfasst. Der entsprechende Geschwindigkeitsverlauf des Fahrzeugs ist in Abbildung 1 näherungsweise dargestellt.

Dabei ist die Geschwindigkeit in m/s auf der y – Achse dargestellt und die Zeit in s auf der x – Achse.

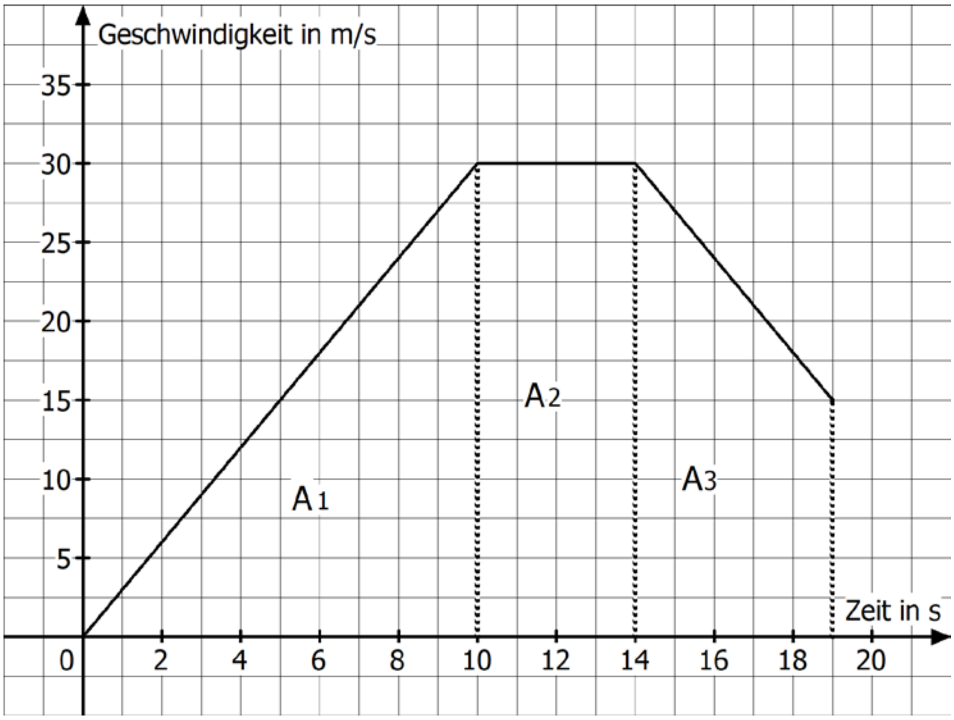


Abbildung 1

2.1 Geben Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Versuchsfahrzeuges an. **/3**
Geben Sie die Gesamtdauer des Geschwindigkeitsverlaufes in Sekunden an.
Geben Sie die Höchstgeschwindigkeit des Versuchsfahrzeuges an.

Die Flächen zwischen dem Geschwindigkeitsverlauf und der x – Achse sind in Abbildung 1 mit A_1, A_2 und A_3 bezeichnet. Die Flächeninhalte der drei Teilflächen entsprechen den Strecken, die das Versuchsfahrzeug in den jeweiligen Zeitintervallen zurückgelegt hat.

2.2 Berechnen Sie die Flächeninhalte von A_1, A_2 und A_3. **/4**
Geben Sie die zurückgelegte Gesamtstrecke in m an.
[Zur Kontrolle: s_{gesamt} = 382,5 m]

2.3 Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Versuchsfahrzeuges. **/2**

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Abbildung 1 stellt den tatsächlichen Geschwindigkeitsverlauf nur ungenau dar. Ein genaueres Messverfahren hat ergeben, dass der Geschwindigkeitsverlauf im Intervall $0 \leq x \leq 10$ beschrieben werden kann durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{1000}x^4 + \frac{2}{5}x^2 \;;\; 0 \leq x \leq 10$$

(Abbildung 2).

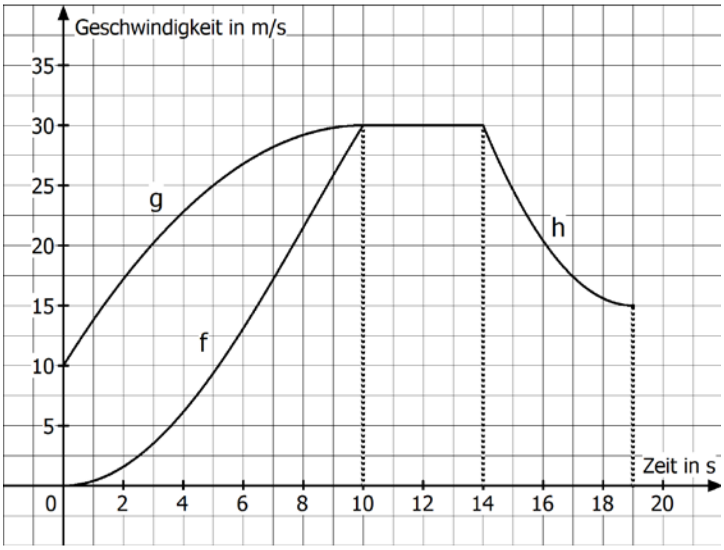


Abbildung 2

2.4 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Koordinatenursprung und der Punkt (10|30) auf dem Graphen der Funktion f liegen. **/2**

2.5 Berechnen Sie die Größe der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x – Achse im Intervall $0 \leq x \leq 10$. **/6**
Geben Sie die zurückgelegte Strecke in m an, die das Versuchsfahrzeug in den ersten 10 Sekunden zurückgelegt hat.

Ein zweites Versuchsfahrzeug hat an der Stelle $x = 0$ bereits eine Anfangsgeschwindigkeit von 10 m/s. Der Geschwindigkeitsverlauf dieses Fahrzeugs kann für das Intervall $0 \leq x \leq 10$ näherungsweise durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden (Abbildung 2).
Dabei hat die Funktion g folgende Funktionsgleichung:

$$g(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 4x + 10 \;;\; 0 \leq x \leq 10.$$

2.6 Berechnen Sie die Größe der Fläche, die zwischen dem Graphen der Funktion f und dem Graphen der Funktion g im Intervall $0 \leq x \leq 10$ liegt. **/7**
Deuten Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

Auch im Intervall $14 \leq x \leq 19$ ist der Geschwindigkeitsverlauf in Abbildung 1 nur ungenau dargestellt. In diesem Intervall hat das Versuchsfahrzeug einen tatsächlichen Weg von 100 m zurückgelegt. Deshalb soll für dieses Intervall nun die Funktion h mit folgender Funktionsgleichung gelten (Abbildung 2):

$$h(x) = ax^2 - 22{,}8x + 231{,}6 \;,\; a \in \mathbb{R}.$$

2.7 Für einen Wert des Parameters a beträgt die Größe der eingeschlossenen Fläche zwischen dem Graphen der Funktion h und der x – Achse im Intervall $14 \leq x \leq 19$ genau 100 FE. **/6**
Ermitteln Sie diesen Wert von a.

3 Stochastik /30

In einem Unternehmen nutzen alle Beschäftigten ein Passwort. Die Passwörter des Unternehmens können entweder vierstellig oder fünfstellig sein. Sie dürfen entweder aus Buchstaben oder aus Buchstaben und Ziffern bestehen.
Bei einer Befragung wurde folgendes festgestellt:

- bei 25 % der Passwörter handelt es sich um ein vierstelliges Passwort
- von den vierstelligen Passwörtern bestehen ein Drittel nur aus Buchstaben
- von den fünfstelligen Passwörtern bestehen 80 % aus Ziffern und Buchstaben.

3.1 Erstellen Sie zu diesem Sachverhalt ein vollständiges Baumdiagramm und beschriften Sie alle Zweigwahrscheinlichkeiten. **/6**
Nennen Sie auch die Bedeutung von Abkürzungen, die Sie verwenden.

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse: **/6**
E_1: Ein zufällig ausgewähltes Passwort besteht nur aus Buchstaben.
E_2: Ein zufällig ausgewähltes Passwort ist fünfstellig und besteht aus Ziffern und Buchstaben.
E_3: Ein zufällig ausgewähltes Passwort ist fünfstellig oder es besteht nur aus Buchstaben.

An einer Befragung haben 220 Beschäftigte teilgenommen, davon waren 25 % Auszubildende.
Von den Auszubildenden hatten 35 ein fünfstelliges Passwort.
Insgesamt hatten 155 der Befragten ein fünfstelliges Passwort.

3.3 Erstellen Sie aus den Informationen eine vollständige Vierfeldertafel. **/6**
Machen Sie die von Ihnen verwendeten Abkürzungen mit Hilfe einer Legende deutlich.

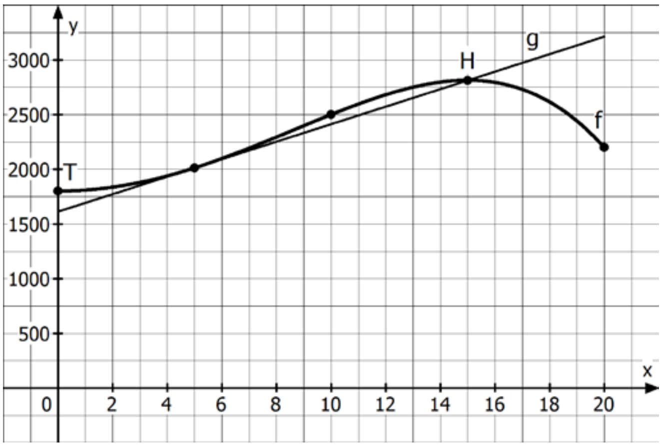
3.4 Von den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. **/3**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person ein vierstelliges Passwort gewählt hat.

3.5 Aus der Gruppe der Befragten mit vierstelligen Passwörtern wird eine Person ausgewählt. **/3**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gewählte Person ein Auszubildender ist.

3.6 Von den Befragten wird eine Person ausgewählt. **/6**
Betrachtet werden folgende Ereignisse:
E_4: Die Person gehört zu den Auszubildenden.
E_5: Die Person hat ein fünfstelliges Passwort.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse E_4 und E_5 stochastisch unabhängig sind.

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

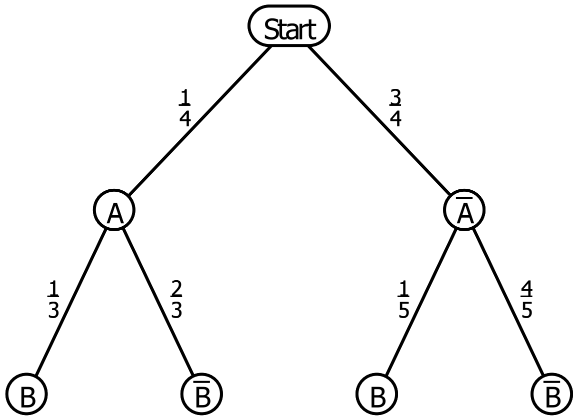
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$D = [0\ ,\ 20]$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>1800</td><td>2013</td><td>2500</td><td>2813</td><td>2200</td></tr>
</table>
1 Fehler = 1 Punkt, ab 2 Fehler 0 Punkte
Bei gleichen Rundungsfehlern nur 1 BE Abzug</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$f(x) = 0$
$0 = -0{,}02x^4 + 9x^2 + 1800 \quad \mathrm{I}\ x^2 = z$
$0 = -0{,}02z^2 + 9z + 1800 \quad \mathrm{I}: (-0{,}02)$
$0 = z^2 - 450z - 90000$
$z_{1/2} = 225 \pm \sqrt{225^2 + 90000}$
$z_1 = 600 \ \mathrm{I}\ \sqrt{}$
$z_2 = -150 \Longrightarrow$ entfällt, da negativ
$x_{N1/N2} \approx \pm 24{,}5$
Beide Nullstellen liegen außerhalb des betrachteten Bereiches.</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>$f'(x) = 0$
$f'(x) = -0{,}08x^3 + 18x$
$0 = -0{,}08x^3 + 18x$
$0 = x(-0{,}08x^2 + 18)$
$x_{E1} = 0$
$0 = -0{,}08x^2 + 18$
$x_{E2} = 15$
$x_{E3} = -15 < 0 \Longrightarrow$ außerhalb des betrachteten Bereiches
$f''(x) = -0{,}24x^2 + 18$
$f''(0) = 18 > 0 \Longrightarrow$ Tiefpunkt
$f''(15) = -36 < 0 \Longrightarrow$ Hochpunkt
$f(15) \approx 2813$
Im Jahr 2015 war die Besucherzahl am höchsten und betrug 2813 Besucher.</td><td></td><td>8</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
1.5		3		
1.6	$m = \frac{f(15)-f(5)}{15-5} = \frac{2813-2013}{15-5} = \frac{800}{10} = 80$ Die Besucherzahl hat zwischen den Jahren 2005 und 2015 durchschnittlich um 80 Besucher jährlich zugenommen. Zeichnung von *g*	2 1		1
1.7	$f'(10) = 100 = m_t$ $t(x) = m_t x + n$ $2500 = 100 \cdot 10 + n$ $n = 1500$ $t(x) = 100x + 1500$ $t(20) = 100 \cdot 20 + 1500 = 3500$ Hätte sich die Zunahme der Besucherzahl ab 2010 wie durch *t* beschrieben entwickelt, dann hätten im Jahr 2020 3500 Personen das Museum besucht.		5	
1.8	$2800 = -0{,}02 \cdot 10^4 + a \cdot 10^2 + 1800$ $2800 = -200 + 100a + 1800$ $1200 = 100a \quad \Rightarrow \quad a = 12$		3	
1.9	$h''(x) = 0$; $h'''(x) \neq 0$; $h'(x) > 0$ $h'(x) = -0{,}08x^3 + 24x$; $h''(x) = -0{,}24x^2 + 24$; $h'''(x) = -0{,}48x$ $0 = -0{,}24x^2 + 24 \Rightarrow x_W = 10$ $h'(10) = 160 > 0 \Rightarrow$ max. Steigung bei $x_W = 10$			7
	Mögliche BE	8	24	8
	Summe Aufgabe	40		

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2.1	Anfangsgeschwindigkeit: $0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ Gesamtdauer des Geschwindigkeitsverlaufes: 19 s Höchstgeschwindigkeit: $30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$	3		
2.2	$A_1 = \frac{10 \cdot 30}{2} = 150$ $A_2 = 30 \cdot 4 = 120$ $A_3 = 5 \cdot 15 + \frac{15 \cdot 5}{2} = 112{,}5$ $s_{\text{gesamt}} = 150\text{ m} + 120\text{m} + 112{,}5\text{ m} = 382{,}5\text{ m}$		4	
2.3	$v = \frac{s_{\text{gesamt}}}{t} = \frac{382{,}5\text{ m}}{19\text{ s}} \approx 20{,}13\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$		2	
2.4	$f(10) = 30$ $f(0) = 0$	2		
2.5	$A_{\text{neu}} = \int_0^{10} \left(-\frac{1}{1000}x^4 + \frac{2}{5}x^2\right)\text{d}x = \left[-\frac{1}{5000}x^5 + \frac{2}{15}x^3\right]_0^{10}$ $A_{\text{neu}} = \left(-\frac{1}{5000}\cdot 10^5 + \frac{2}{15}\cdot 10^3\right) - 0 = 113{,}\overline{3}$ Die zurückgelegte Strecke in diesem Intervall beträgt nun 113 m.		6	
2.6	Differenzfunktion: $\text{d}(x) = g(x) - f(x)$ $\text{d}(x) = \frac{1}{1000}x^4 - \frac{3}{5}x^2 + 4x + 10$ $\text{A} = \int_0^{10} \left(\frac{1}{1000}x^4 - \frac{3}{5}x^2 + 4x + 10\right)\text{d}x = \left[\frac{1}{5000}x^5 - \frac{1}{5}x^3 + 2x^2 + 10x\right]_0^{10}$ $\text{A} = \left(\frac{1}{5000}\cdot 10^5 - \frac{1}{5}\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 10\cdot 10\right) - 0 = 120$		6	
	Die Größe der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion *f* und dem Graphen der Funktion *g* beträgt 120 FE. Hierbei handelt es sich um die Strecke in Metern (120 m), die das zweite Fahrzeug innerhalb der 10 s mehr zurücklegt als das erste. <u>Alternativ</u> kann auch die Größe der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion *g* und der *x* – Achse berechnet werden. Anschließend muss die Fläche aus 2.5 davon subtrahiert werden.			1

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.7	$\int_{14}^{19} \left(ax^2 - 22{,}8x + 231{,}6\right)\mathrm{d}x = 100$ $\left[\frac{1}{3}ax^3 - 11{,}4x^2 + 231{,}6x\right]_{14}^{19} = 100$ $1371{,}\bar{6}a - 723 = 100$ $a = 0{,}6$			6
	Mögliche BE	5	18	7
	Summe Aufgabe	30		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>A: vierstelliges Passwort
B: nur Buchstaben

Andere Varianten des Baumdiagramms sind ebenfalls möglich.

</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$P(E_1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{7}{30} \approx 0{,}23$
$P(E_2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$
$P(E_3) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>C: Befragter ist Auszubildender
D: fünfstelliges Passwort (fett im Text gegeben)

<table>
<tr><th></th><th>D</th><th>$\overline{D}$</th><th>∑</th></tr>
<tr><td>C</td><td>35</td><td>20</td><td>55</td></tr>
<tr><td>$\overline{C}$</td><td>120</td><td>45</td><td>165</td></tr>
<tr><td>∑</td><td>155</td><td>65</td><td>220</td></tr>
</table></td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>$P(\overline{D}) = \frac{65}{220} \approx 0{,}295$

Ungefähr 30 % der befragten Beschäftigten nutzen ein vierstelliges Passwort.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>$P_{\overline{D}}(C) = \frac{20}{65} = \frac{4}{13} \approx 0{,}3077$

Aus der Gruppe der Beschäftigten mit vierstelligen Passwörtern sind rund 31 % Auszubildende.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
3.6	E_4: $P(C) = \frac{55}{220} = 0{,}25$ E_5: $P(D) = \frac{155}{220} \approx 0{,}7045$ $P_D(C) = \frac{35}{155} \approx 0{,}2258$		2	
	$P(C) = P_D(C)$, dann sind die Ereignisse stochastisch unabhängig voneinander $\frac{55}{220} = 0{,}25 \neq \frac{35}{155} = 0{,}2258$ Die Ereignisse sind nicht stochastisch unabhängig voneinander. Alternativ über: stochastisch unabhängig, wenn gilt: $P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D)$			4
	Mögliche BE	6	20	4
	Summe Aufgabe	30		

Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Schuljahr 2020/2021

Fach	**Mathematik (B)**
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	**27. Mai 2021**
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	**Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt zu den Wahlmöglichkeiten.**
Erwartungshorizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	**Soll**
1	40
2	30
3	30
Summe[1]:	70

[1] Jeder Prüfling bearbeitet nur eine der beiden Aufgaben Nr. 2 oder Nr. 3.

1 Funktionsuntersuchung /40

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{54}x^3 + \frac{1}{18}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{14}{27},\ \ x \in \mathrm{IR}.$

Geben Sie bei den folgenden Aufgaben Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma an.

1.1 Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle. **/3**

x	-3	-2	-1	1	4	6	8
$f(x)$		0					

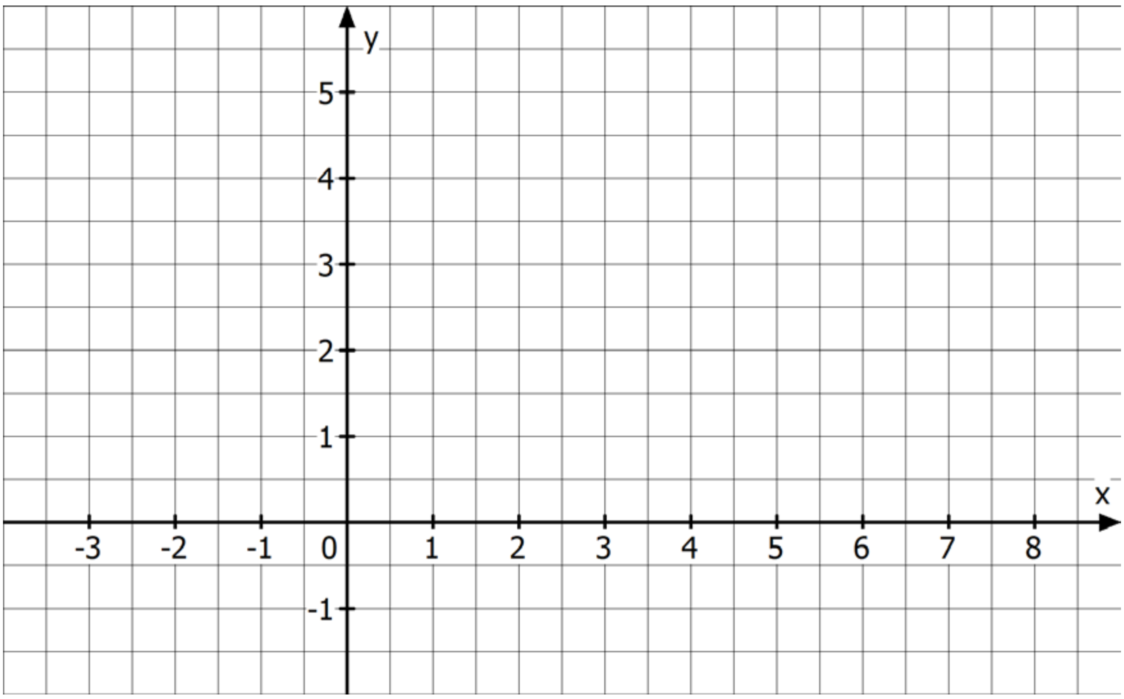
1.2 Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktion f mit den Koordinatenachsen. **/10**
[*Hinweis: Beachten Sie, dass gilt: f(– 2) = 0.*]

1.3 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f an der Stelle $x = -2$ die x– Achse nicht schneidet, sondern sie nur berührt. **/3**

1.4 Berechnen Sie die Stelle, an der die Funktion f ihr relatives Maximum hat. **/7**

1.5 Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Funktion f mithilfe der Ergebnisse aus den Aufgabenteilen 1.1 bis 1.4 in das folgende Koordinatensystem ein. **/3**

Koordinatensystem zu Aufgabenteil 1.5



Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Auf einer Wasserski-Anlage soll ein Hindernis aufgestellt werden, damit die Anlage auch für bessere Wasserskiläufer*innen interessant ist. Der Teil des Hindernisses, der aus dem Wasser ragt, folgt in seinem Profil der Funktion *f* aus den Aufgabenteilen 1.1 bis 1.5.

Die x–Achse entspricht der Wasserlinie (Wasseroberfläche).

Die Länge des Hindernisses entspricht der Länge der Wasserlinie des Hindernisses.

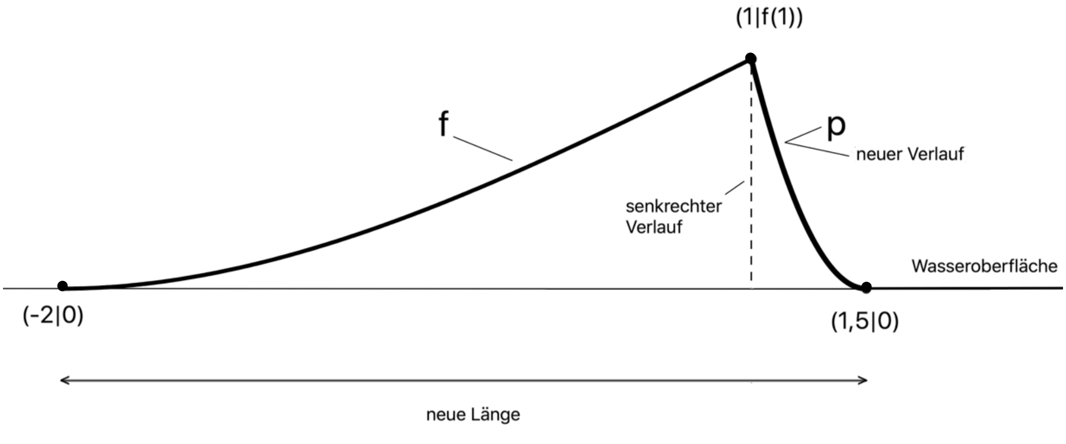
1 Einheit im Koordinatensystem entspricht 1 Meter in der Realität.

1.6 Berechnen Sie die Länge des Hindernisses, wenn es an der Stelle $x = -2$ beginnt und an der Stelle mit dem größten Anstieg senkrecht zur Wasseroberfläche abfällt und dort endet. **/5**

1.7 Eine wasserskifahrende Person verlässt das Hindernis im Punkt $(1|f(1))$. Dabei verläuft die Flugbahn dieser Person anfänglich tangential zum Hindernis. Berechnen Sie die Funktionsgleichung dieser Tangente. **/3**

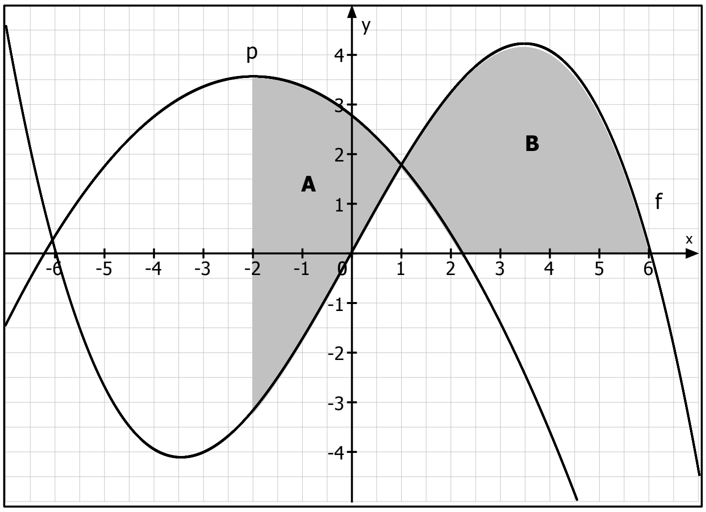
1.8 Das Hindernis soll nun doch nicht am Ende senkrecht nach unten abfallen, sondern von dem Punkt $(1|f(1))$ an parabelförmig zur Wasseroberfläche hin auslaufen. Das Profil dieses Abschnittes entspricht dabei der Parabel p mit $p(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$. Die Parabel endet in ihrem Scheitelpunkt $S\ (1{,}5|0)$. Geben Sie die neue Länge des Hindernisses an. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel p. **/6**

<u>Hindernis</u>



2 Integralrechnung /30

Die Graphen der Funktionen von *f* und *p* umschließen zwei Flächen *A* und *B*.
Im zweiten und dritten Quadranten wird die Fläche A nach links begrenzt durch die senkrechte Gerade, die durch den Scheitelpunkt der Parabel geht.
Die Fläche B wird im ersten Quadranten außerdem durch die *x*-Achse begrenzt (siehe Abbildung).



Gegeben seien dabei die Funktionen *f* und *p* mit

$f(x) = -0{,}05x^3 + 1{,}8x$

und

$p(x) = -0{,}2x^2 - 0{,}8x + 2{,}75$

Für die Funktionen *f* und *p* gilt $x \in IR$.

2.1 Ermitteln Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel *p*. **/6**
Berechnen Sie die Nullstellen von *p*.

2.2 Berechnen Sie die Nullstellen des Graphen der Funktion *f*. **/3**

2.3 Zeichnen Sie alle Stellen in die Abbildung ein, die zur Berechnung der grauen Flächen notwendigen sind. **/1**

2.4 Berechnen Sie die fehlende Koordinate des Punktes $S\,(1|f\,(1))$. **/3**
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Punkt ein Schnittpunkt der Funktionen *f* und *p* ist.
[Hinweis: Die Berechnung weiterer Schnittpunkte ist nicht notwendig.]

2.5 Weisen Sie rechnerisch nach, dass $d(x) = -0{,}05x^3 + 0{,}2x^2 + 2{,}6x - 2{,}75$ die Funktionsgleichung der Differenzfunktion von *f* und *p* ist. **/4**
Begründen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussage:
„Die Nullstellen der Differenzfunktion der Funktionen f und p sind gleichzeitig auch die Schnittstellen der Funktionen f und p."

2.6 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche *A*. **/5**
[Hinweis: Sollten Sie die notwendigen Stellen nicht berechnet haben, können Sie diese aus der Zeichnung ablesen.]

2.7 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche *B*. **/8**
[Hinweis: Sollten Sie die notwendigen Stellen nicht berechnet haben, können Sie diese aus der Zeichnung ablesen.]

3 Stochastik /30

Ein Fahrradverleih in Berlin bietet drei Arten von Fahrrädern an:

- Mountainbikes (Fahrrad mit Federung für das Gelände),
- klassische Fahrräder und
- E-Bikes (Fahrrad mit Elektromotor).

Von allen Personen, die im Sommer täglich diesen Fahrradverleih nutzen, leihen sich im Durchschnitt $\frac{1}{5}$ der Fahrradfahrer ein Mountainbike aus. Zum klassischen Fahrrad greifen 65 % der Fahrradfahrer. Der restliche Anteil der Personen entscheidet sich für ein E-Bike. Weitere Fahrräder kann man sich nicht ausleihen.

3.1 An der Kasse des Fahrradverleihs erscheint eine Person. **/2**
Erläutern Sie, warum die Wahrscheinlichkeit, mit der sich diese Person ein E-Bike ausleiht, bei 15 % liegt.

3.2 Nacheinander leihen sich zwei Personen je ein Fahrrad bei dem Fahrradverleih aus. **/6**
Erstellen Sie zu diesem Sachverhalt ein vollständiges Baumdiagramm und beschriften Sie alle Zweigwahrscheinlichkeiten.
Nennen Sie auch die Bedeutung von Abkürzungen, die Sie verwenden.

3.3 Nacheinander leihen sich zwei Personen je ein Fahrrad bei dem Fahrradverleih aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse: **/8**

E_1: „Beide Personen leihen sich die gleiche Art von Fahrrad aus.“

E_2: „Beide Personen leihen sich unterschiedliche Arten von Fahrrädern aus.“

E_3: „Beide Personen leihen kein klassisches Fahrrad aus.“

E_4: „Maximal eine der beiden Personen leiht sich ein klassisches Fahrrad aus.“

3.4 Die E-Bikes mit den Nummern 1 bis 8 müssen abends im Lager des Fahrradverleihs in einer bestimmten Reihenfolge in eine abschließbare Fahrradbox mit den Fächern A – H einsortiert werden. **/3**
Geben Sie die Anzahl der unterschiedlichen Möglichkeiten an, die beim Einräumen denkbar sind.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Insgesamt ist der Anteil an Touristen, die sich bei diesem Fahrradverleih ein Fahrrad ausleihen, im Gegensatz zu Kunden aus Berlin erkennbar zu niedrig. Dies soll sich durch die Auswertung einer Befragung von Kunden des Fahrradverleihs ändern. Dazu wurden 80 Kunden zufällig ausgewählt und befragt. 52 Personen gaben an, dass sie sich ein klassisches Fahrrad ausgeliehen haben, darunter waren 20 Touristen. Insgesamt lag der Anteil an Touristen, die sich ein Fahrrad ausgeliehen haben, bei 32,5 %. Eine Unterscheidung bei der Befragung zwischen Mountainbike und E-Bike fand nicht statt.

3.5 Erstellen Sie aus den Informationen eine vollständige Vierfeldertafel. Machen Sie die von Ihnen verwendeten Abkürzungen mit Hilfe einer Legende deutlich. **/6**

3.6 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine befragte Person ein Kunde aus Berlin war und sich gleichzeitig ein klassisches Fahrrad ausgeliehen hat. **/2**

3.7 Der Fahrradverleiher behauptet: „Unter den Kunden aus Berlin ist der Anteil derjenigen, die sich <u>kein</u> klassisches Fahrrad ausleihen, größer als der Anteil derjenigen, die sich <u>kein</u> klassisches Fahrrad ausleihen, unter den Touristen." Erläutern Sie begründet, ob die Behauptung richtig oder falsch ist. **/3**

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>−3</td><td>−2</td><td>−1</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>0,19</td><td>0</td><td>0,15</td><td>1</td><td>2</td><td>1,19</td><td>−1,85</td></tr>
</table>
</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Schnittpunkte mit der x–Achse:
$0 = -\frac{1}{54}x^3 + \frac{1}{18}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{14}{27} \quad |:(-\frac{1}{54})$
$\Leftrightarrow 0 = x^3 - 3x^2 - 24x - 28$
Polynomdivision/Hornerschema mit $x_{N_1} = -2$:
$(x^3 - 3x^2 - 24x - 28) : (x + 2) = x^2 - 5x - 14$
$\Rightarrow r(x) = x^2 - 5x - 14$
$\Rightarrow \quad 0 = x^2 - 5x - 14$
$\Rightarrow$ *p-q-Formel:* $x_{N_2} = -2$ und $x_{N_3} = 7 \Rightarrow S_{x_{1/2}}(-2|0)$ und $S_{x_3}(7|0)$
Schnittpunkt mit der y–Achse:
$f(0) = \frac{14}{27} \approx 0{,}52 \qquad \Rightarrow S_y\left(0\middle|\frac{14}{27}\right)$</td><td>

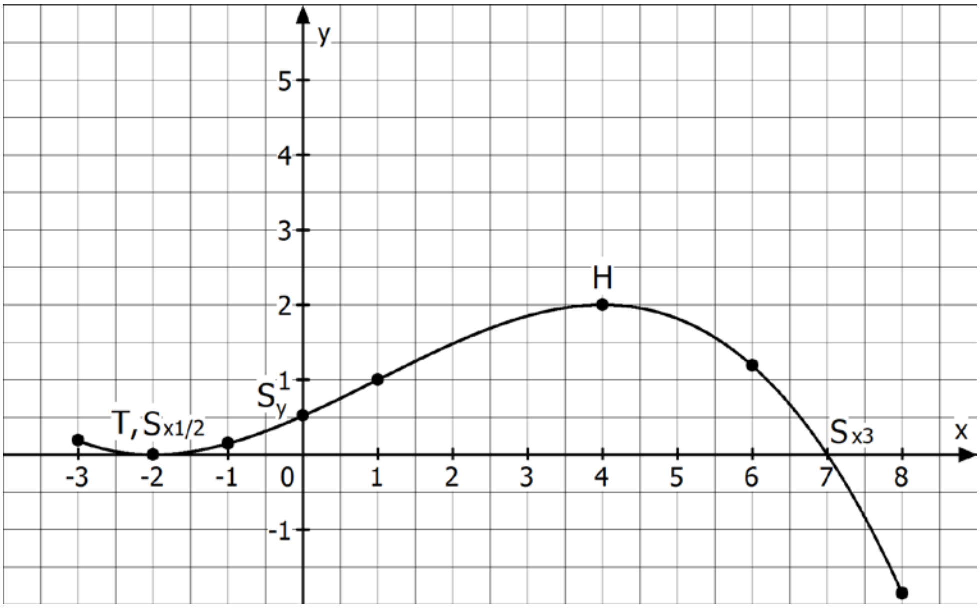
2</td><td>2

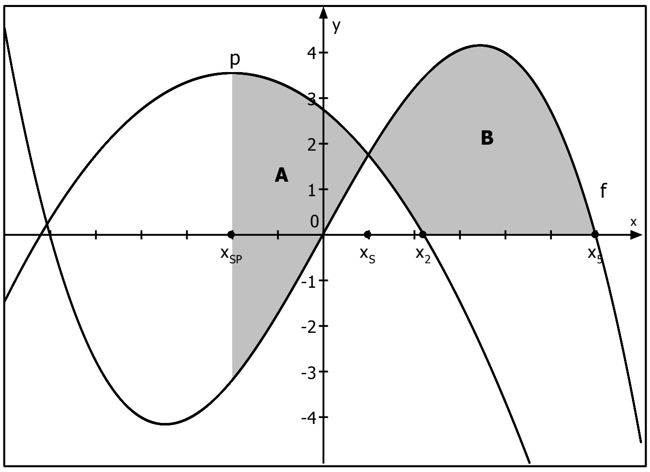
3

3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>i) Nullstelle bei $x = -2$: $f(-2) = 0$ (kann auch aus 1.1 abgelesen werden)
ii) $f'(x) = -\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$
Waagerechte Tangente bei $x = -2$:
$f'(-2) = -\frac{1}{18}(-2)^2 + \frac{1}{9}(-2) + \frac{4}{9} = 0$
Aus i) und ii) folgt, dass bei $x = -2$ ein Berührpunkt mit der x–Achse liegt.
Alternative: Da bei $S_{x1}(-2|0)$ eine doppelte Nullstelle vorhanden ist, muss bei $x = -2$ ein Berührpunkt liegen.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>1.4</td><td><u>Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$</u>
$f'(x) = -\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$ (aus 1.2 übernommen)
$f''(x) = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{9}$
$0 = -\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{4}{9} \quad | :(-\frac{1}{18})$
$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 2x - 8$
$\Rightarrow$ *p-q-Formel:* $x_{E_1} = -2$ und $x_{E_2} = 4$
<u>Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$</u>
$f''(4) = -\frac{1}{3} < 0 \quad \Rightarrow$ relatives Maximum (Hochpunkt)
$f''(-2) = \frac{1}{3} > 0 \quad \Rightarrow$ relatives Minimum (Tiefpunkt)</td><td>

2</td><td>

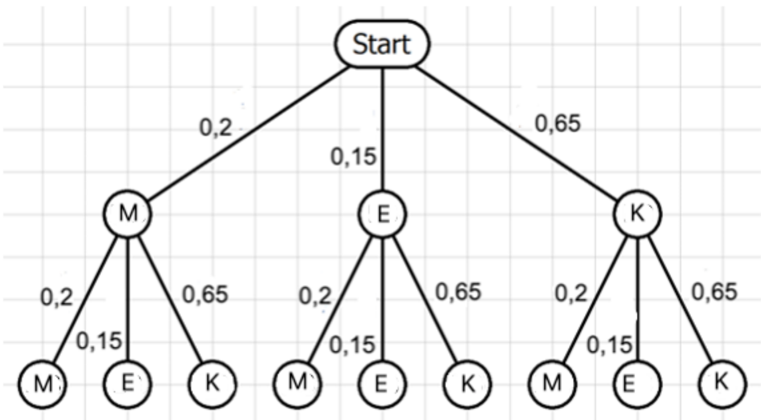
5</td><td></td></tr>
</table>

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
1.5		3		
1.6	<u>Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$</u> $0 = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{9} \quad \| : (-\frac{1}{9})$ $0 = x - 1 \qquad \Rightarrow x_W = 1$ <u>Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$</u> $f'''(x) = -\frac{1}{9}$ $f'''(1) = -\frac{1}{9} \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $f'(1) = -\frac{1}{18} \cdot 1^2 + \frac{1}{9} \cdot 1 + \frac{4}{9} > 0 \Rightarrow$ Anstieg Der stärkste Anstieg des Graphen der Funktion befindet sich an der Stelle $x = 1$. Somit hat das Hindernis eine Länge von 3 Metern.			4 1
1.7	$f'(1) = 0{,}5$ und $f(1) = 1$ in $t(x) = m \cdot x + n$ $\Rightarrow 1 = 0{,}5 \cdot 1 + n \Rightarrow n = 0{,}5$ $\Rightarrow t(x) = 0{,}5x + 0{,}5$		3	
1.8	Das Hindernis ist jetzt 3,5 Meter lang. Scheitelpunkt (1,5|0) und $p(1) = 1$ in $p(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ $\Rightarrow 1 = a \cdot (1 - 1{,}5)^2 + 0 \Rightarrow a = 4$ $\Rightarrow p(x) = 4 \cdot (x - 1{,}5)^2$	2	4	
	Mögliche BE	12	20	8
	Summe Aufgabe	40		

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2.1	$f(x) = -0{,}2x^2 - 0{,}8x + 2{,}75$ $f'(x) = -0{,}4x - 0{,}8$ $0 = -0{,}4x - 0{,}8$ $x_{\mathrm{SP}} = -2$ SP$(-2\|3{,}55)$ Alternative: $-\frac{p}{2} = -2$ und $f(-2) = 3{,}55$ Nullstellen der Parabel: $f(x) = 0$ $0 = -0{,}2x^2 - 0{,}8x + 2{,}75$ $0 = x^2 + 4x - 13{,}75$ $x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 + 13{,}75} = -2 \pm 4{,}213$ $x_1 = -6{,}213$; $x_2 = 2{,}213$	1 3	2	
2.2	$0 = -0{,}05x^3 + 1{,}8x \quad \|:(-0{,}05)$ $0 = x^3 - 36x$ $0 = x(x^2 - 36)$ $x_3 = 0 \quad x_4 = -6 \quad x_5 = 6$		3	
2.3		1		
2.4	$f(1) = -0{,}05 \cdot 1^3 + 1{,}8 \cdot 1 = 1{,}75 \quad \Rightarrow \quad$ S$(1\|1{,}75)$ $p(1) = -0{,}2 \cdot 1^2 - 0{,}8 \cdot 1 + 2{,}75 = 1{,}75$ S ist Schnittpunkt der Funktionen f und p.		3	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.5	$f(x) = p(x)$ $-0{,}05x^3 + 1{,}8x = -0{,}2x^2 - 0{,}8x + 2{,}7$ | umstellen $-0{,}05x^3 + 0{,}2x^2 + 2{,}6x - 2{,}75 = 0$ | entspricht $\mathrm{d}(x)$ Der Ansatz zur Berechnung der Schnittstellen der Graphen von *f* und *g* lautet: $f(x) = p(x) \quad \Rightarrow \quad 0 = p(x) - f(x)$ Mit $p(x) - f(x) = \mathrm{d}(x)$ ergibt sich: $p(x) - f(x) = \mathrm{d}(x) = 0$. Somit ist die Aussage wahr und die Nullstellen der Differenzfunktion sind gleichzeitig auch die Schnittstellen der Funktionen *f* und *g*. Auch alternative Antworten sind möglich!	1		3
2.6	Flächeninhalt *A*: $\left\| \int_{-2}^{1} \mathrm{d}(x)\,\mathrm{d}x \right\| = \left\| [\mathrm{D}(x)]_{-2}^{1} \right\| = \|\mathrm{D}(1) - \mathrm{D}(-2)\| = \|-1{,}396 - 9{,}967\| = 11{,}363$ $\mathrm{d}(x) = -0{,}05x^3 + 0{,}2x^2 + 2{,}6x - 2{,}75$ $\mathrm{D}(x) = -\frac{1}{80}x^4 + \frac{1}{15}x^3 + 1{,}3x^2 - 2{,}75x$ Der Flächeninhalt der Fläche *A* beträgt <u>11,363 FE.</u> Auch alternative Lösungen möglich.		5	
2.7	Flächeninhalt *B*: $B = B_1 + B_2$ $B_1 = \int_{1}^{2{,}213} \mathrm{d}(x)\,\mathrm{d}x = [\mathrm{D}(x)]_{1}^{2{,}213} = \mathrm{D}(2{,}213) - \mathrm{D}(1)$ $B_1 = 0{,}704 - (-1{,}396) = 2{,}1$ $B_2 = \int_{2{,}213}^{6} p(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{80}x^4 + 0{,}9x^2\right]_{2{,}213}^{6} = \mathrm{P}(6) - \mathrm{P}(2{,}213)$ $B_2 = 16{,}2 - 4{,}108 = 12{,}092$ $B = B_1 + B_2 = 2{,}1 + 12{,}092 = 14{,}192$ Der Flächeninhalt der Fläche *B* beträgt <u>14,192 FE.</u> Auch alternative Lösungen möglich.		8	
	Mögliche BE	6	21	3
	Summe Aufgabe	30		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>$\frac{1}{5}$ der Personen leihen sich ein Mountainbike aus. Das entspricht 20 %.
65 % der Personen leihen sich ein klassisches Fahrrad aus. Somit müssen sich 15 % der Personen ein E-Bike ausleihen:
100 % – 20 % – 65 % = 15 %.

Alternativlösungen sind möglich.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>M: Mountainbike E: E-Bike K: klassisches Fahrrad
</td><td>2

4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>$P(E_1) = P(M \cap M) + P(E \cap E) + P(K \cap K)$
$= 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}15 \cdot 0{,}15 + 0{,}65 \cdot 0{,}65 = \frac{97}{200} = 0{,}485$
$P(E_2) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{97}{200} = \frac{103}{200} = 0{,}515$
$P(E_3) = P(M \cap M) + P(M \cap E) + P(E \cap M) + P(E \cap E))$
$= 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}15 + 0{,}15 \cdot 0{,}2 + 0{,}15 \cdot 0{,}15 = \frac{49}{400} = 0{,}1225$
$P(E_4) = 1 - P(K \cap K) = 1 - 0{,}65 \cdot 0{,}65 = \frac{231}{400} = 0{,}5775$</td><td></td><td>2
2
2
2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>Es gibt 8! = 40320 Möglichkeiten die E-Bikes in das Regal einzusortieren.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>K: „klassische/r Fahrradfahrer*in“ T: „Tourist“
$|T| = 0{,}325 \cdot 80 = 26$
<table><tr><th></th><th>K</th><th>$\overline{K}$</th><th>$\sum$</th></tr><tr><td>T</td><td>20</td><td>6</td><td>26</td></tr><tr><td>$\overline{T}$</td><td>32</td><td>22</td><td>54</td></tr><tr><td>$\sum$</td><td>52</td><td>28</td><td>80</td></tr></table>fett: direkt bzw. indirekt aus dem Text entnommen</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
3.6	$P(\overline{T} \cap K) = \frac{32}{80} = 0{,}4$		2	
3.7	$P_{\overline{T}}(\overline{K}) = \frac{22}{54} \approx 0{,}41$ $P_T(\overline{K}) = \frac{6}{26} \approx 0{,}23$ Der Fahrradverleiher hat recht. Unter den Kunden aus Berlin ist der Anteil derjenigen, die sich <u>kein</u> klassisches Fahrrad ausleihen bei ca.41 %. Bei den Touristen sind es dagegen nur ca. 23 %.			3
	Mögliche BE	10	17	3
	Summe Aufgabe	30		