Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Schuljahr 2019/2020

Fach	**Mathematik (B)**
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	18. Mai 2020
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt.
Erwartungs-horizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	**Soll**
1	40
2	30
3	30
Summe:	100

Abschlussprüfung Fachoberschule 2020
Mathematik

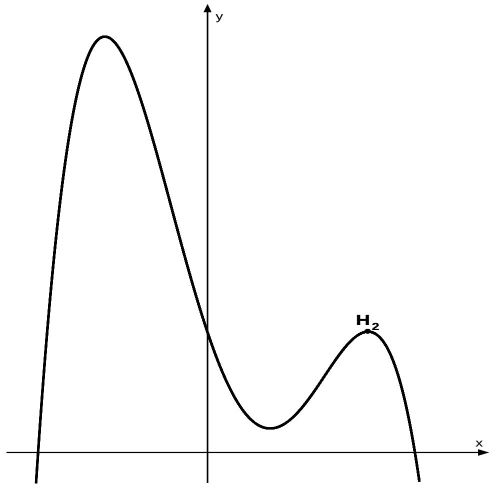
Aufgabenvorschlag B

1 Funktionsuntersuchung /40

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Funktionsgleichung

$f(x) = -0{,}5x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \quad (x \in \mathbb{R}),$
$-2{,}25 \leq x \leq 2{,}75$

Der Graph von *f* ist nebenstehend skizziert.



1.1 Geben Sie den Schnittpunkt des Graphen G_f von *f* mit der *y* - Achse an. Bei $x = 2$ liegt der Hochpunkt H_2. Geben Sie die *y* - Koordinate von H_2 an. **/2**

1.2 Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle. Skizzieren Sie den Graphen G_f von *f* im Intervall $[-2{,}25\,;\,2{,}75]$ in das Koordinatensystem auf der nächsten Seite. **/6**

x	−2,25	−2	−1,5	−1	-0,5	0,5	1	1,5	2,5	2,75
$f(x)$		2,00		6,50			0,50		0,59	

1.3 Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktion $f'(x) = (x-2)\cdot(-2x^2 - x + 2)$ der ersten Ableitung der Funktion *f* entspricht. Begründen Sie, warum die weiteren Extremstellen des Graphen von *f* durch die Berechnung der Nullstellen des Restpolynoms $r(x) = -2x^2 - x + 2$ bestimmt werden können. **/5**

1.4 Ermitteln Sie rechnerisch die Art und die Koordinaten der beiden weiteren Extrempunkte des Graphen von *f*. **/8**

1.5 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 2{,}5$ und die Nullstelle dieser Tangente. **/6**

1.6 An einem Punkt *Q*, der zwischen den beiden Hochpunkten liegt, hat der Verlauf des Graphen ein maximales Gefälle. Berechnen Sie die Koordinaten von *Q*. **/5**

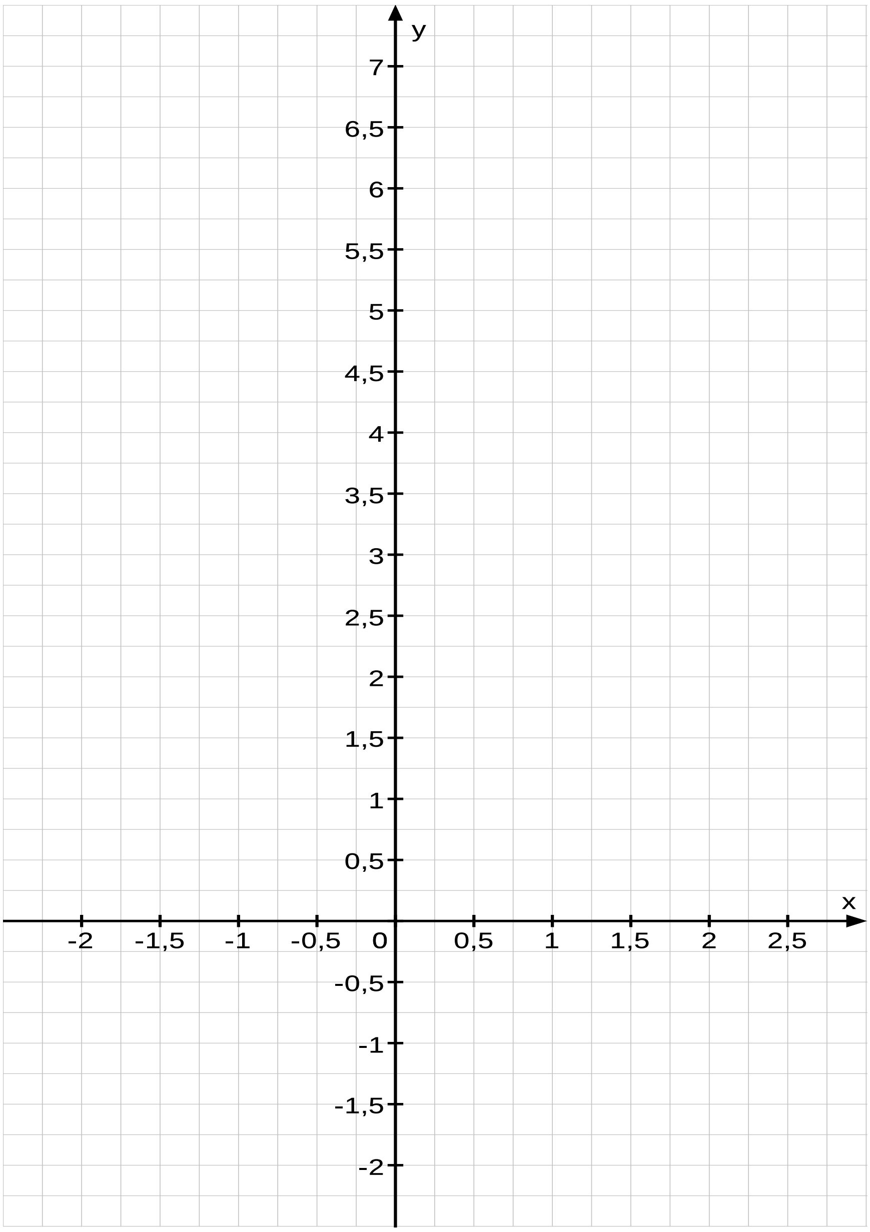
Fortsetzung auf der nächsten Seite!

Der Graph von f stellt den Höhenverlauf eines Gebirges dar. Eine Einheit auf der x - Achse entspricht dabei 1000 m. Eine Einheit auf der y - Achse entspricht 100 m.

1.7 Eine Hängebrücke, die die Form einer Parabel hat, soll zwischen den Punkten P_1 (0|2) und P_2 (2|2) befestigt werden. Der Scheitelpunkt dieser Parabel befindet sich im Punkt S (1|1,75).
Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Hängebrücke in Scheitelpunktform.
Skizzieren Sie den Verlauf der Hängebrücke im unten stehenden Koordinatensystem. **/5**

1.8 Im Punkt R (−2|2), der auf dem Graphen der Funktion f liegt, ist eine Aussichtsplattform geplant. Dazu wird der Anstiegswinkel an dieser Stelle benötigt.
Bestimmen Sie den Winkel, den der Höhenverlauf zur Horizontalen im Punkt R hat.
[*Hinweis: Beachten Sie die unterschiedliche Einteilung der Koordinatenachsen.*] **/3**

Koordinatensystem für Aufgabe 1.2 und 1.7



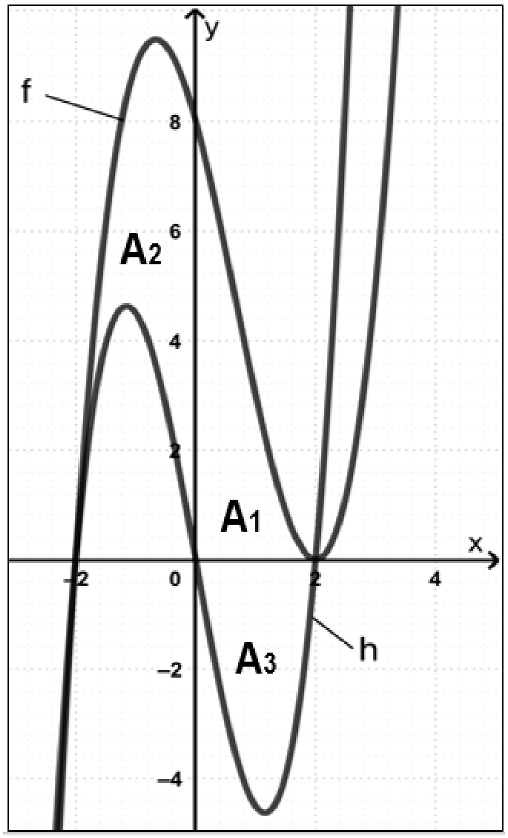
2 Integralrechnung /30

Gegeben sind die Funktionen f und h mit den Funktionsgleichungen

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \qquad (x \in IR)$

und

$h(x) = 1{,}5x^3 - 6x \qquad (x \in IR)$.



Die zugehörigen Graphen G_f und G_h schließen eine Fläche vollständig ein, die mit A_{ges} bezeichnet wird (siehe *Abbildung*).

Diese Fläche besteht aus drei Teilflächen:

- A_1 bezeichnet die Teilfläche im 1. Quadranten,
- A_2 bezeichnet die Teilfläche im 2. Quadranten und
- A_3 bezeichnet die Teilfläche im 4. Quadranten.

2.1 Geben Sie das Symmetrieverhalten der Funktion h an und begründen Sie Ihre Aussage. **/2**

2.2 Aus der Abbildung kann man entnehmen, dass die Graphen G_f und G_h im Intervall $-2 \le x \le 2$ die zwei Schnittpunkte $S_1(-2|0)$ und $S_2(2|0)$ haben. Die beiden Graphen haben jedoch noch einen dritten Schnittpunkt, der außerhalb des Intervalls $-2 \le x \le 2$ liegt. **/8**
Ermitteln Sie auch die Koordinaten dieses Schnittpunktes.

2.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Teilfläche A_3. **/4**

2.4 Erläutern Sie ohne Berechnungen der einzelnen Flächeninhalte, warum für den Flächeninhalt der Gesamtfläche A_{ges} gilt: **/4**

$$A_{\text{ges}} = A_1 + A_2 + A_3 = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx.$$

Fortsetzung auf der nächsten Seite!

Die Gerade $g(x) = 3x$ verläuft durch den Koordinatenursprung und den Punkt (1|3). Ihr Graph G_g teilt die Fläche A_1 in die zwei Teilflächen $A_{1/1}$ und $A_{1/2}$.

2.5 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt P(1|3) auch auf dem Graphen der Funktion *f* liegt. **/2**

2.6 Zeichnen Sie den Graph G_g in das Koordinatensystem auf der vorherigen Seite ein. **/2**

2.7 Weisen Sie nach, dass die beiden durch den Graphen G_g neu entstandenen Teilflächen $A_{1/1}$ und $A_{1/2}$ <u>nicht</u> gleich groß sind. **/8**

3 Stochastik /30

In einer Stichprobe wurde die Auslastung von Fahrzeugen untersucht. Die Stichprobe umfasste 125 Fahrzeuge, bei denen jeweils die Anzahl der Personen in den Fahrzeugen gezählt wurde. Fahrzeuge mit mehr als 5 Sitzplätzen wurden nicht berücksichtigt.
Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

E	1 Person	2 Personen	3 Personen	4 Personen	5 Personen
absolute Häufigkeit $H(E)$	54	33	13	17	8
relative Häufigkeit $h(E)$					

3.1 Ergänzen Sie in der Tabelle die jeweiligen relativen Häufigkeiten $h(E)$ in Prozent. **/3**

3.2 Ermitteln Sie die durchschnittliche Personenzahl pro Fahrzeug. **/3**

Die Ergebnisse der Stichprobe können im Folgenden als repräsentativ für alle Fahrzeuge angesehen werden.
Bei allen weiteren Aufgaben soll nur noch zwischen „nur mit einer Person besetzt“ und „mit mehr als einer Person besetzt“ unterschieden werden.

3.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug mit mehr als einer Person besetzt ist. **/3**

3.4 An einer Hauptverkehrsstraße werden drei zufällig vorbeifahrende Fahrzeuge ausgewählt. **/7**
Erstellen Sie ein passendes Baumdiagramm für die Ereignisse „Fahrzeug nur mit einer Person besetzt“ und „Fahrzeug mit mehr als einer Person besetzt“.
Tragen Sie für alle Pfade die Zweigwahrscheinlichkeiten entlang der Pfade ein.

3.5 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse: **/4**
A: Von drei zufällig ausgewählten Fahrzeugen ist genau eines mit nur einer Person besetzt.
B: Von drei zufällig ausgewählten Fahrzeugen sind mindestens zwei mit nur einer Person besetzt.

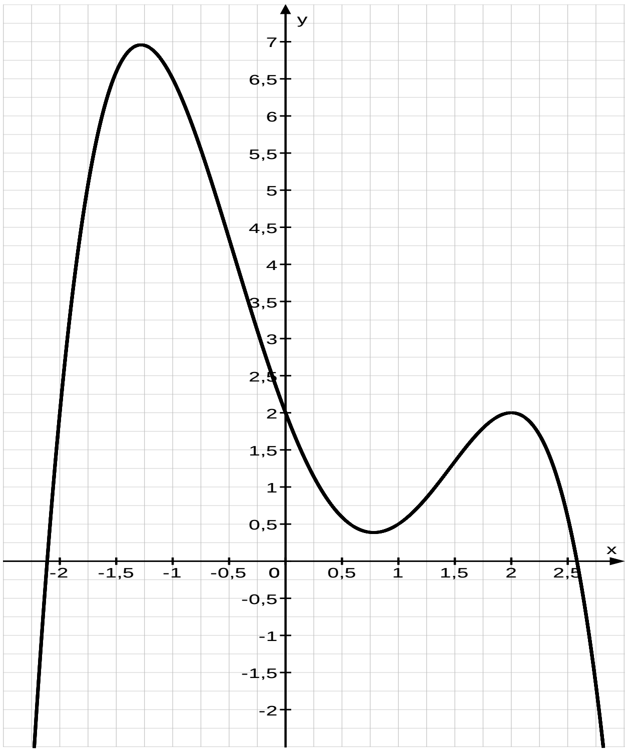
Von den 125 erfassten Fahrzeugen besaßen 8 % einen elektrischen Antrieb und von den 54 Fahrzeugen mit „nur einer Person besetzt“ besaß ein Neuntel einen elektrischen Antrieb.

3.6 Stellen Sie diesen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar und vervollständigen Sie diese. Nennen Sie die Bedeutung der Abkürzungen, die Sie verwenden. **/6**

3.7 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug mit mehr als einer Person besetzt war und keinen elektrischen Antrieb besaß. **/2**

3.8 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug ohne elektrischen Antrieb nur mit einer Person besetzt war. **/2**

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$f(0) = 2$, $P_Y(0|2)$
$f(2) = 2$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>−2,25</td><td>−2</td><td>−1,5</td><td>−1</td><td>-0,5</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2,5</td><td>2,75</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>−3,08</td><td>2,00</td><td>6,59</td><td>6,50</td><td>4,34</td><td>0,59</td><td>0,50</td><td>1,34</td><td>0,59</td><td>−1,67</td></tr>
</table>


</td><td>3</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$f'(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

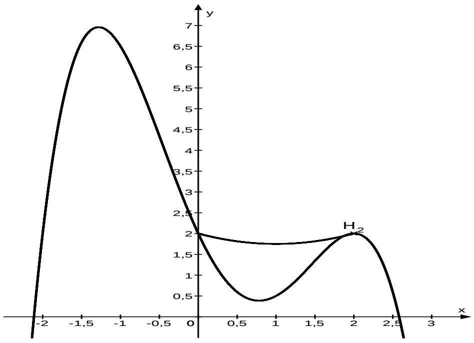
$f'(x) = (x-2) \cdot (-2x^2 - x + 2) = -2x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

Die Extremstellen des Graphen von f sind Nullstellen von der Ableitungsfunktion von f (f'). Ist das Restpolynom $r(x)$ null und wird dieses mit dem Linearfaktor $(x-2)$ mulitipliziert, so wird die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ebenfalls null. Somit sind die Nullstellen des Restpolynoms alle weiteren möglichen Extremstellen des Graphen von f.</td><td></td><td>3</td><td>2</td></tr>
</table>

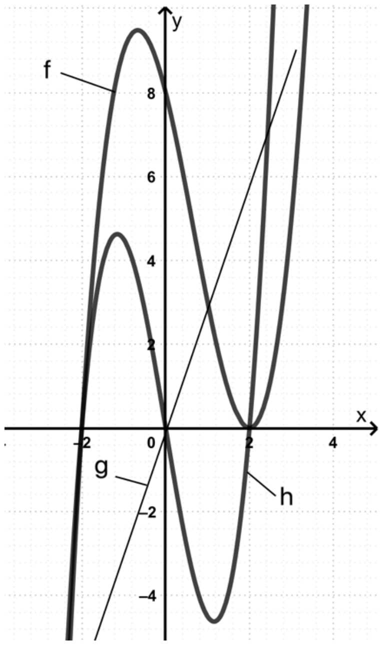
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.4</td><td>$f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
$f'(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4x - 4$
$f''(x) = -6x^2 + 6x + 4$
Restpolynom aus 1.3
$0 = -2x^2 - x + 2 \mid :(-2)$
$0 = x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
$x_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 1}$
$x_{E2} = 0{,}78$; $x_{E3} = -1{,}28$

$f''(0{,}78) = 5{,}03 > 0 \quad \Rightarrow$ Tiefpunkt $T\,(0{,}78|0{,}39)$
$f''(-1{,}28) = -13{,}51 < 0 \quad \Rightarrow$ Hochpunkt $H_1\,(-1{,}28|6{,}96)$</td><td>4</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>P $(2{,}5|0{,}59)$
$f'(2{,}5) = -6{,}5 = m$
$t(x) = mx + n$
$0{,}59 = -6{,}5 \cdot 2{,}5 + n$
$16{,}84 = n$
$t(x) = -6{,}5x + 16{,}84$
$0 = -6{,}5x + 16{,}84$
$x_N = 2{,}59$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>$f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$
$0 = -6x^2 + 6x + 4 \mid :(-6)$
$0 = x^2 - x - \frac{2}{3}$
$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}} = 0{,}5 \pm 0{,}96$
$x_{Q1} = -0{,}46$; $x_{Q2} = 1{,}46$
$f'''(x) \neq 0$
$f'''(x) = -12x + 6$
$f'''(-0{,}46) = 11{,}52 > 0$, Rechts-Links-Krümmung/maximales Gefälle
$f'''(1{,}46) = -11{,}52 < 0$, Links-Rechts-Krümmung/steigend entfällt

Das stärkste Gefälle des Graphen der Funktion befindet sich im Punkt
$Q\,(-0{,}46|4{,}14)$.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

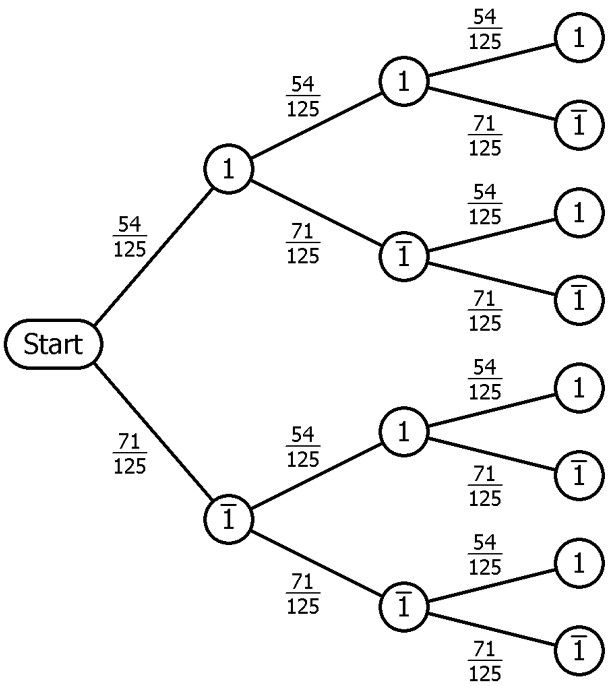
Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.7	$P_1(0\|2)$; $P_2(2\|2)$; $S(1\|1{,}75)$ Scheitelpunktform: $y = a(x - d)^2 + e$ $2 = a(2 - 1)^2 + 1{,}75 \quad \| - 1{,}75$ $0{,}25 = a$ $p(x) = 0{,}25(x - 1)^2 + 1{,}75$ Skizze der Hängebrücke 	1		4
1.8	$R(-2\|2)$ $f'(-2) = 16$ Maßstab 100/1000 also Faktor 0,1 also $m = 1{,}6$ $\alpha = 57{,}99° \approx 58°$		1	2
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	22	8
	Summe der BE	40		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.1	Die Funktion h ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da sie nur ungerade Exponenten enthält. Oder $h(-x) = 1{,}5(-x)^3 - 6(-x) = -(1{,}5x^3 - 6x) = g(x)$.	2		
2.2	$f(x) = h(x)$: $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 1{,}5x^3 - 6x$ $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$ Hornerschema oder Polynomdivision mit $x_{S1} = -2$ (oder $x_{S2} = 2$): $\Rightarrow \begin{array}{rrrr} 1 & 4 & -4 & -16 \\ 0 & -2 & -4 & 16 \\ \hline 1 & 2 & -8 & 0 \end{array} \Rightarrow r(x) = x^2 + 2x - 8$ $\Rightarrow 0 = x^2 + 2x - 8 \Rightarrow x_{S3} = -4$ $\Rightarrow f(-4) = h(-4) = -72 \Rightarrow S_3(-4\|-72)$	2 2	4	
2.3	$A_3 = \left\| \int_0^2 h(x)\,dx \right\| = \left\| \int_0^2 (1{,}5x^3 - 6x)\,dx \right\| = \left\| \left[\frac{3}{8}x^4 - 3x^2\right]_0^2 \right\|$ $A_3 = \|-6\|$ FE $= 6$ FE		4	
2.4	Die Gesamtfläche besteht aus den Flächen A_1, A_2 und A_3 : $A_{ges} = A_1 + A_2 + A_3$. Die Gesamtfläche entspricht aber auch der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und h vollständig eingeschlossen wird: $A_{ges} = \int_{-2}^{2} (f(x) - h(x))\,dx = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx - \int_{-2}^{2} h(x)\,dx$. Aufgrund der Punktsymmetrie der Funktion h ergibt sich $\int_{-2}^{2} h(x)\,dx = 0$: $A_{ges} = A_1 + A_2 + A_3 = \int_{-2}^{2} (f(x) - h(x))\,dx$ $= \int_{-2}^{2} f(x)\,dx - \int_{-2}^{2} h(x)\,dx = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx - 0$ $= \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$. <u>Alternativ</u> kann auch jede sinngemäß identische Erläuterung, die sich auf die Punktsymmetrie der Funktion h und somit auf die Flächenbilanz der von der Funktion h und der x - Achse im 2. und 4. Quadranten eingeschlossenen Flächen bezieht, ebenfalls akzeptieren werden.			4
2.5	$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 8 = 3 \Rightarrow P(1\|3) \in f$	2		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	II	III
2.6		2		
2.7	$A_{1/1} = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx$ $A_{1/1} = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - 7x + 8)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 8x\right]_0^1 = \frac{49}{12} \approx 4{,}08$ FE $A_{1/2} = \int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$ $A_{1/2} = \int_0^1 3x\,dx + \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8)\,dx$ $A_{1/2} = \left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 + 8x\right]_1^2$ $A_{1/2} = \frac{3}{2} + \frac{13}{12} = \frac{31}{12} \approx 2{,}58$ FE Beiden Teilflächen sind nicht gleich groß. <u>Alternativ</u> können auch die Fläche A_1 und eine der beiden Teilflächen berechnet werden. Der Flächeninhalt der noch fehlenden Teilfläche entsteht dann als Differenz der vorab bestimmten Flächeninhalte.		4 4	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	16	4
	Summe der BE	30		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>

E	1 Person	2 Personen	3 Personen	4 Personen	5 Personen
***H*(*E*)**	54	33	13	17	8
***h*(*E*)**	43,2 %	26,4 %	10,4 %	13,6 %	6,4 %

</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$\overline{E} = \frac{54\cdot 1 + 33\cdot 2 + 13\cdot 3 + 17\cdot 4 + 8\cdot 5}{125} = 2{,}136$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>$P(\overline{1}) = 1 - \frac{54}{125} = 0{,}568$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>1: Fahrzeug mit einer Person besetzt
$\overline{1}$: Fahrzeug mit mehr als einer Person besetzt

</td><td>2</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>$P(A) = P(1\overline{1}\overline{1};\ \overline{1}1\overline{1};\ \overline{1}\overline{1}1)$
$P(A) = 3\cdot\left(\frac{54}{125}\cdot\frac{71}{125}\cdot\frac{71}{125}\right) \approx 0{,}418$

$P(B) = P(111;\ 11\overline{1};\ 1\overline{1}1;\ \overline{1}11)$
$P(B) = \frac{54}{125}\cdot\frac{54}{125}\cdot\frac{54}{125} + \frac{54}{125}\cdot\frac{54}{125}\cdot\frac{71}{125} + \frac{54}{125}\cdot\frac{71}{125}\cdot\frac{54}{125} + \frac{71}{125}\cdot\frac{54}{125}\cdot\frac{54}{125}$
$P(B) = \left(\frac{54}{125}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{54}{125}\cdot\frac{54}{125}\cdot\frac{71}{125}\right) \approx 0{,}399$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.6</td><td>1: Fahrzeug mit einer Person besetzt
E: Fahrzeug mit elektrischem Antrieb
<table>
<tr><th></th><th>E</th><th>$\bar{E}$</th><th>$\sum$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td><td>48</td><td>54</td></tr>
<tr><td>$\bar{1}$</td><td>4</td><td>67</td><td>71</td></tr>
<tr><td>$\sum$</td><td>10</td><td>115</td><td>125</td></tr>
</table></td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>3.7</td><td>$P(\bar{1} \cap \bar{E}) = \frac{67}{125} = 0{,}536$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.8</td><td>$P_{\bar{E}}(1) = \frac{48}{115} \approx 0{,}417$</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>8</td><td>20</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">30</td></tr>
</table>

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie

Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Schuljahr 2019/2020

Fach	Mathematik (A)
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	08. Juni 2020
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt.
Erwartungs-horizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	Soll
1	40
2	30
3	30
Summe:	100

1 Funktionsuntersuchung **/40**

Der Onlinedienst A erfasst laufend die Anzahl der angemeldeten Nutzer. Für einen bestimmten Tag kann die Anzahl der angemeldeten Nutzer in Abhängigkeit zur Tageszeit näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion f mit:

$f(x) = -2x^3 + 50x^2 + 2500 \quad (x \in \mathrm{IR}),\ 0 \le x \le 24.$

Dabei gibt $f(x)$ die Anzahl der angemeldeten Nutzer an und x die Zeit in Stunden, beginnend mit 0 Uhr.

1.1 Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle. **/3**

x	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$f(x)$	2500				6244				3652

1.2 Berechnen Sie die Extrempunkte des Graphen von f. **/9**
Geben Sie die Uhrzeit an, zu der die meisten Nutzer angemeldet waren.
Geben Sie die Anzahl der zu diesem Zeitpunkt angemeldeten Nutzer an.

1.3 Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen von f. **/6**
Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes im Sachzusammenhang.

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f unter Verwendung aller bisher ermittelten Punkte in das Koordinatensystem **auf der folgenden Seite**. **/5**
Nehmen Sie hierfür zunächst eine sinnvolle Achseneinteilung (Skalierung) vor.

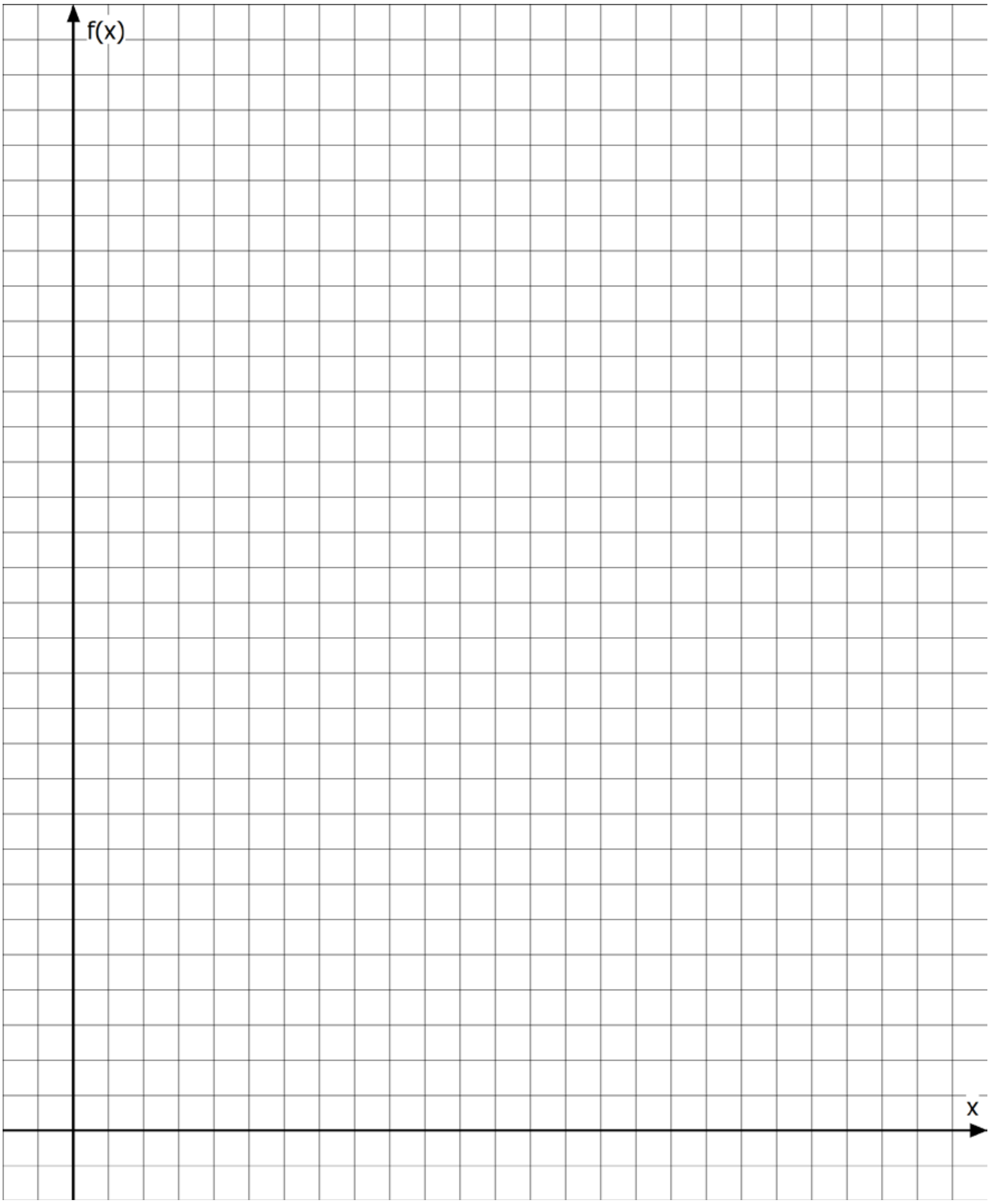
1.5 Zeichnen Sie die Gerade s durch die Punkte $P_1(0 \mid f(0))$ und $P_2(24 \mid f(24))$ in das Koordinatensystem ein. **/7**
Bestimmen Sie die Geradengleichung der Geraden s.
Erläutern Sie, welche Informationen man aus dem Wert der Geradensteigung entnehmen kann.

1.6 Für einen anderen Onlinedienst B kann die Anzahl der angemeldeten Nutzer, für den gleichen Tag in einem bestimmten Zeitraum, durch die Funktion g mit: **/3**
$g(x) = ax^4 + 50x^2 + 1500,\ x \in \mathrm{IR}$ beschrieben werden.
Um 10 Uhr haben beide Onlinedienste die gleiche Anzahl von Nutzern, d. h. es gilt:
$g(10) = f(10) = 5500.$
Ermitteln Sie den Wert des Parameters a.
[Zur Kontrolle: $a = -0{,}1$]

Fortsetzung auf der nächsten Seite

1.7 In dem Zeitraum $10 \leq x \leq 18$ hat der Onlinedienst B mehr angemeldete Nutzer als der Onlinedienst A. **/7**
Ermitteln Sie den Zeitpunkt in diesem Bereich, an dem der Unterschied der Nutzerzahlen maximal ist und geben Sie den Unterschied an.
Hinweis: Es genügt die Untersuchung der notwendigen Bedingung.

Koordinatensystem für Aufgabe 1.4 und Aufgabe 1.5



2 Integralrechnung /30

Die Form eines Sportdrachens kann durch die Graphen von drei Funktionen beschrieben werden und ist in *Abbildung 1* (siehe rechts) und *Abbildung 2* (siehe unten) dargestellt. 1 LE entspricht dabei 1 dm.

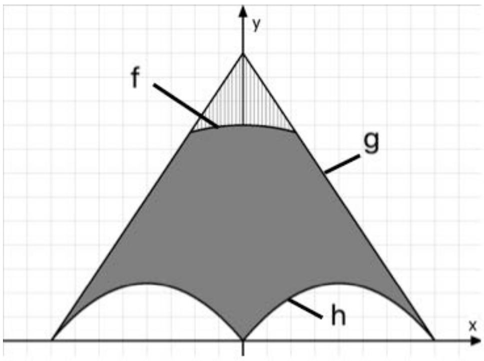


Abbildung 1: Skizze des Sportdrachens

Die Teilstücke A_1 und A_2 des Sportdrachens entsprechen den Flächen, die im Intervall I = [0;4] von den Graphen G_f , G_g und G_h der Funktionen *f*, *g* und *h* mit den Funktionsgleichungen:

$f(x) = -0{,}125x^2 + 4{,}5 \qquad (x \in IR)$,

$g(x) = -1{,}5x + 6 \qquad (x \in IR)$,

$h(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}2x \qquad (x \in IR)$

und der *y* - Achse gebildet werden. Der gesamte Drachen entsteht dann durch eine Spiegelung der Teilflächen A_1 und A_2 an der *y* - Achse.

Zusätzlich entsteht noch eine weitere Fläche A_3 unterhalb des Drachens. Diese Fläche wird von dem Graphen G_h und der *x* - Achse begrenzt (*Abbildung 2*).

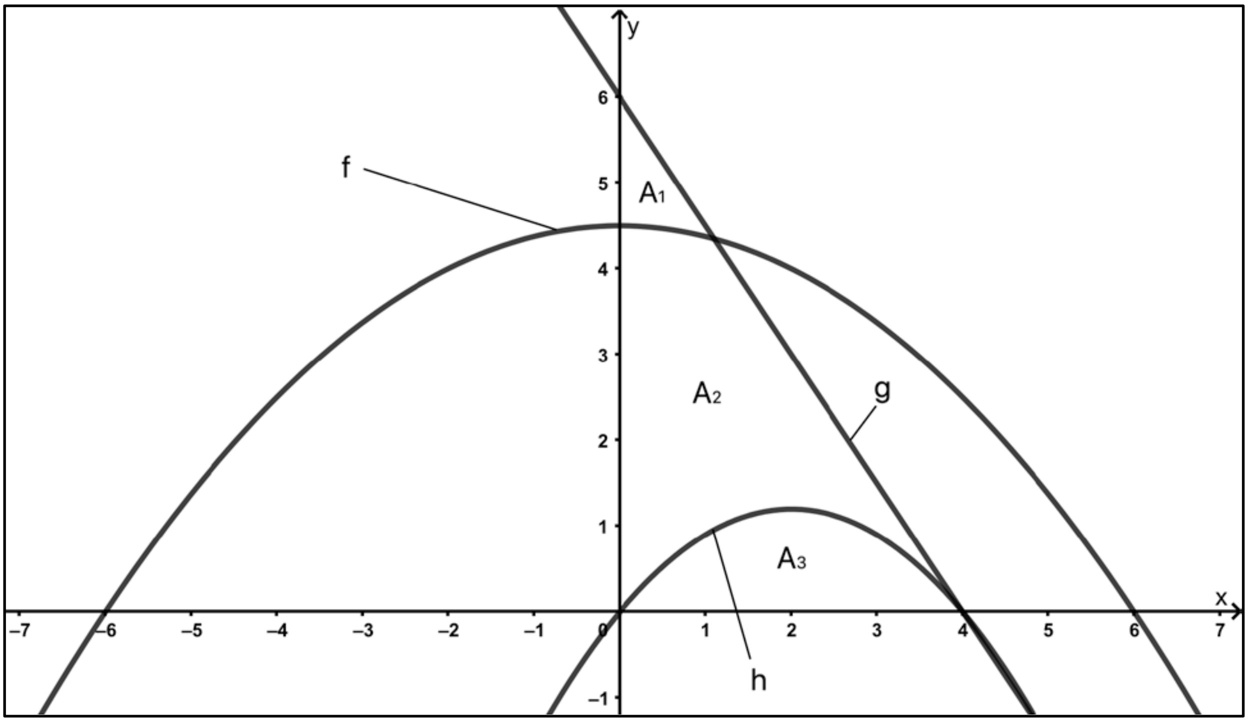


Abbildung 2: Graphen im Koordinatensystem

Fortsetzung auf der nächsten Seite

2.1 Berechnen Sie die Schnittstellen von G_g und G_h mit der x - Achse. **/3**

2.2 Ein Schnittpunkt der Geraden G_g mit der Parabel G_f hat eine x – Koordinate, die im Intervall I = [0;4] liegt. **/5**
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes.
[*Hinweis: Sollten Sie diese Teilaufgabe nicht bearbeiten können, so benutzen Sie für Ihre weiteren Berechnungen als Schnittstelle von* G_g und G_f den Wert $x_S = 1{,}10$.]

2.3 In der *Abbildung 2* sehen Sie nur einen Teil des Sportdrachens. Der gesamte Drachen entsteht erst durch Spiegelungen der Graphen G_g und G_h an der y-Achse. **/2**
Skizzieren Sie die gespiegelten Funktionsgraphen von G_g und G_h im Koordinatensystem der *Abbildung 2*.

2.4 Der gespiegelte Funktionsgraph von G_g wird mit G_i und der gespiegelte Funktionsgraph von G_h mit G_j bezeichnet. **/5**
Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der zugehörigen Funktionen i und j und begründen Sie Ihr Ergebnis.

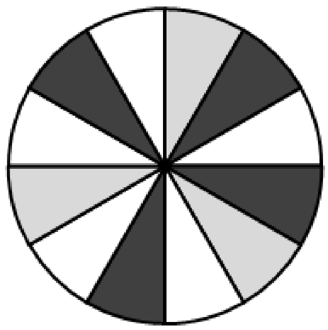
2.5 Berechne Sie den Flächeninhalt der Teilflächen A_1 und A_3 in dm^2. **/11**
[*Hinweis: Sie dürfen alle für die Berechnung notwendigen Werte aus der Abbildung 2 entnehmen.*]

2.6 Geben Sie einen Ansatz zur Berechnung der Teilfläche A_2 an. **/4**
[*Hinweis: Das Ausführen der Berechnung ist nicht gefordert.*]

3 Stochastik /30

Bei einem Glücksspiel wird ein Glücksrad benutzt.

Das Glücksrad hat 3 graue, 4 schwarze und 5 weiße Sektoren. Beim Drehen bleibt das Glücksrad zufällig genau bei einem Sektor stehen. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit für jeden Sektor gleich groß.



3.1 Das Glücksrad wird <u>zweimal</u> gedreht. **/6**
Erstellen Sie für dieses Zufallsexperiment ein Baumdiagramm.
Tragen Sie für alle Pfade die Zweigwahrscheinlichkeiten entlang der Pfade ein.

3.2 Das Glücksrad wird <u>zweimal</u> gedreht. **/10**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
E_1: „Es werden zweimal graue Kreissegmente gedreht."
E_2: „Es werden zweimal gleichfarbige Kreissegmente gedreht."
E_3: „Es wird kein einziges Mal ein schwarzes Kreissegment gedreht."
E_4: „Es wird mindestens einmal ein graues Kreissegment gedreht."

3.3 Luise möchte gern die einzelnen Kreissegmente so anordnen, dass die gleiche Farbe immer nebeneinander liegt. **/2**
Ändern sich dadurch die Pfadwahrscheinlichkeiten?
Begründen Sie Ihre Aussage.

Bei einem Schulfest wird dieses Glücksrad benutzt, aber die Regeln werden geändert.

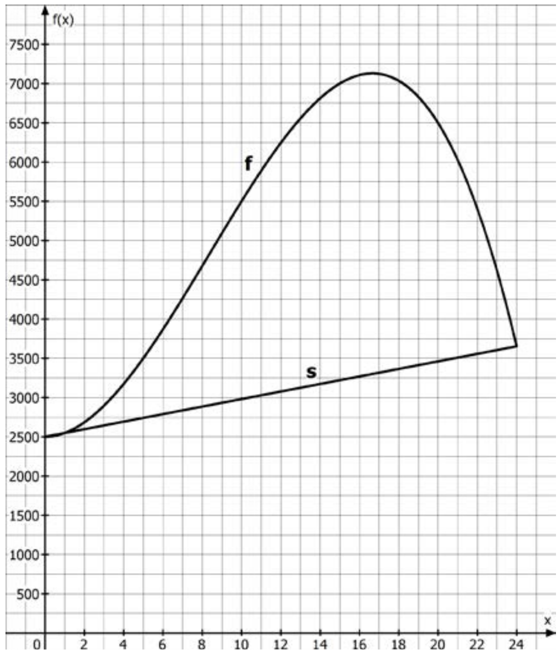
- Das Glücksrad wird bei einem Spiel <u>dreimal</u> gedreht.
- Der Einsatz für ein Spiel beträgt 1 €.
- Wenn dreimal ein graues Segment gedreht wird, erhält man 6 €.
- Wenn dreimal ein schwarzes Segment gedreht wird, erhält man 5 €.
- Wenn dreimal ein weißes Segment gedreht wird, erhält man 4 €.
- In allen anderen Fällen erhält man nichts.

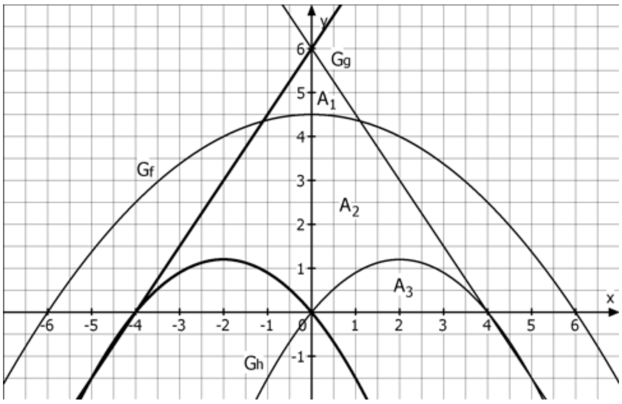
3.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die drei Gewinnmöglichkeiten. **/6**

3.5 Wenn das Spiel sehr häufig gespielt wird, machen die Spieler höchstwahrscheinlich Verlust. **/4**
Ermitteln Sie, wie hoch der Verlust im Durchschnitt pro Spiel sein wird.

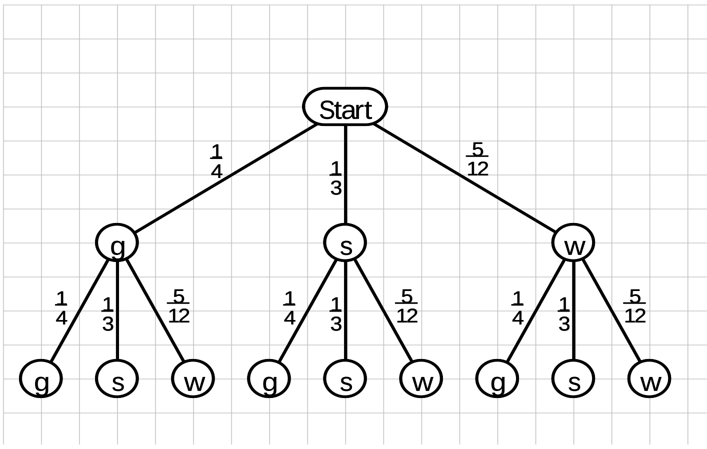
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td><td>18</td><td>21</td><td>24</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>2500</td><td>2896</td><td>3868</td><td>5092</td><td>6244</td><td>7000</td><td>7036</td><td>6028</td><td>3652</td></tr>
</table>
</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>
$f'(x) = 0;\ f''(x) \neq 0$
$f'(x) = -6x^2 + 100x$
$f''(x) = -12x + 100$
$0 = -6x^2 + 100x$
$0 = x(-6x + 100)$
$x_1 = 0\ ;\ x_2 = \frac{50}{3}$
$f''(x_1) = 100 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt
$f''(x_2) = -100 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt
$f\left(\frac{50}{3}\right) \approx 7129{,}63 \implies H\left(\frac{50}{3} \middle| 7130\right)$
$f(0) = 2500 \implies T(0 \mid 2500)$
Um 16:40 Uhr waren die meisten Nutzer angemeldet. Es handelte sich dabei um 7130 Nutzer.
</td><td></td><td>9</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>
$f''(x) = 0;\ f'''(x) \neq 0$
$0 = -12x + 100$
$x_W = \frac{25}{3}$
$f'''(x) = -12 < 0 \implies$ Wendepunkt
$f\left(\frac{25}{3}\right) \approx 4815$
$W\left(\frac{25}{3} \middle| 4815\right)$
Um 8:20 Uhr hat die Anzahl der angemeldeten Nutzer am stärksten zugenommen.
</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
1.4	 Gerade *s* aus Aufgabe 1.5		5	
1.5	Zeichnung der Geraden *s*. $s(x) = mx + n$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3652 - 2500}{24 - 0} = 48$ $n = 2500 \Longrightarrow s(x) = 48x + 2500$ Der Wert ist positiv, also ist die Nutzerzahl am Ende des Tages größer als zu Beginn des Tages. Zudem betrug das Wachstum der Nutzerzahl durchschnittlich 48 Nutzer pro Stunde.	2 3	2	
1.6	$5500 = a \cdot 10^4 + 50 \cdot 10^2 + 1500$ $5500 = 10000a + 6500$ $-1000 = 10000a \quad \Rightarrow a = -0{,}1$			3
1.7	$h(x) = g(x) - f(x) = -0{,}1x^4 + 2x^3 - 1000$ $h'(x) = -0{,}4x^3 + 6x^2$ $0 = -0{,}4x^3 + 6x^2 = x^2(-0{,}4x + 6)$ $x = 0$ entfällt $x = 15$ $g(15) - f(15) = 7687{,}5 - 7000 = 687{,}5$ In dem Zeitraum $10 \leq x \leq 18$ war bei $x = 15$ (15 Uhr) der Unterschied der Nutzerzahlen maximal und betrug rund 688 Nutzer.			7
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	8	22	10
	Summe der BE	40		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
2.1	$g(x) = 0$: $0 = -1{,}5x + 6 \Rightarrow x_{Ng} = 4$ $h(x) = 0$: $0 = -0{,}3x^2 + 1{,}2x = x(-0{,}3x + 1{,}2) \Rightarrow x_{N1h} = 0;\ x_{N2h} = 4$	3		
2.2	$g(x) = f(x)$: $-0{,}125x^2 + 4{,}5 = -1{,}5x + 6$ $0 = 0{,}125x^2 - 1{,}5x + 1{,}5$ $0 = x^2 - 12x + 12$ $\Rightarrow x_{S1} = 6 + 2\sqrt{6} \approx 10{,}90$ Entfällt, da die Schnittstelle außerhalb des Intervalls liegt! $\Rightarrow x_{S2} = 6 - 2\sqrt{6} \approx 1{,}10$ $\Rightarrow g(x_{S2}) = f(x_{S2}) \approx 4{,}35 \Rightarrow S_2(1{,}10 \mid 4{,}35)$	5		
2.3		2		
2.4	$i: i(x) = 1{,}5x + 6$ Begründung: gleicher y - Achsenabschnitt wie g, Steigung wie g nur mit positivem Vorzeichen. $j: j(x) = -0{,}3(x + 4)(x + 0) = -0{,}3x^2 - 1{,}2x$ Begründung: gleicher Streckfaktor wie h, Nullstellen bei $x_{N1j} = -4;\ x_{N2j} = 0$.			2 3
2.5	$A_1 = \int_0^{1{,}10} (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^{1{,}10} (0{,}125x^2 - 1{,}5x + 1{,}5)\,dx$ $A_1 = \left[\frac{1}{24}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_0^{1{,}10} \approx 0{,}8\text{ FE} = 0{,}8\text{ dm}^2$ $A_3 = \int_0^4 h(x)\,dx = \int_0^4 (-0{,}3x^2 + 1{,}2x)\,dx = \left[-\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{5}x^2\right]_0^4$ $A_3 = \frac{16}{5} = 3{,}2\text{ FE} = 3{,}2\text{ dm}^2$		6 5	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.6	$A_2 = \int_0^{1,10} (f(x) - h(x))\,\mathrm{d}x + \int_{1,10}^{4} (g(x) - h(x))\,\mathrm{d}x$ Alternativen sind ebenfalls zu akzeptieren. Beispielsweise über die Berechnung der Dreiecksfläche, die von der Geraden G_g, der y - Achse und der x - Achse gebildet wird: $A_2 = A_{\text{Dreieck}} - (A_1 + A_3)$.		4	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	15	5
	Summe der BE	30		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>g = grau
s = schwarz
w = weiß
(Die Legende ist nicht zwingend erforderlich.)

</td><td></td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$P(E_1) = P(g \cap g) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$
$P(E_2) = P(g \cap g;\, s \cap s;\, w \cap w) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{72} \approx 0{,}3472$
$P(E_3) = P(g \cap g;\, g \cap w;\, w \cap g;\, w \cap w) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12}$
$P(E_3) = \frac{4}{9} \approx 0{,}4444$
$P(E_4) = P(g \cap g;\, g \cap w;\, g \cap s;\, s \cap g;\, w \cap g) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot (\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12})$
$P(E_4) = \frac{7}{16} = 0{,}4375$</td><td></td><td>2
2

3

3</td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich nicht, da immer noch die gleiche Anzahl der jeweiligen Kreissegmente existiert.</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>$P(g \cap g \cap g) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \approx 0{,}0156$
$P(s \cap s \cap s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \approx 0{,}0370$
$P(w \cap w \cap w) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{125}{1728} \approx 0{,}0723$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>P("keine Auszahlung") = 1 – 0,0156 – 0,037 – 0,0723 = 0,8751
E = 0,8751 · 0 € + 0,0156 · 6 € + 0,037 · 5 € + 0,0723 · 4 € = 0,5678 €
Für einen Euro Einsatz werden ca. 57 Cent ausgezahlt. Somit beträgt der Verlust im Durchschnitt 0,43 €.
(Alternative Lösungswege sind möglich.)</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>0</td><td>24</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">30</td></tr>
</table>