Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule/FOS 13 im Schuljahr 2022/2023

Fach	**Mathematik (A)**
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	**03.05.2023**
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	**Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt.**
Erwartungs-horizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	**Soll**
1	33
2	34
3	33
Summe:	100

1 Exponentialfunktion /33

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Gleichung

$$f(x) = x \cdot e^{-0{,}1x}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

1.1 Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen. **/2**

1.2 Zeigen Sie, dass gilt: $f'(x) = (1 - 0{,}1x) \cdot e^{-0{,}1x}$. **/2**

1.3 Ermitteln Sie die Lage und Art des Extrempunktes des Graphen von *f*. **/5**

Ohne Nachweis dürfen Sie nutzen: $f''(x) = (-0{,}2 + 0{,}01x) \cdot e^{-0{,}1x}$

[Zur Kontrolle: $x_E = 10$]

1.4 Der Graph von *f* hat einen Wendepunkt. **/3**

Zeigen Sie, dass die *x*-Koordinate des Wendepunktes $x_W = 20$ ist.

Geben Sie die Koordinaten des Wendepunktes an.

[*Hinweis: Der Nachweis der hinreichenden Bedingung für den Wendepunkt ist nicht erforderlich.*]

1.5 Weisen Sie nach, dass gilt: **/3**

Die Tangente an den Graphen von *f* bei $x = -3{,}75$ hat näherungsweise die Gleichung $g(x) = 2x + 2$.

[*Hinweis: Bei dem Nachweis dürfen Rechenergebnisse auf eine Stelle nach dem Komma gerundet werden.*]

Betrachtet wird nun die Funktion $t(x) = f(x) + 37$ für $x \geq 0$.
Der Graph von *t* beschreibt modellhaft den Verlauf der Fieberkurve eines 2-Tage-Fiebers. Die unabhängige Variable gibt nun die **Zeit in Stunden (h)** nach Ausbruch der Krankheit an und der Funktionswert die Körpertemperatur in **Grad Celsius (°C)**.

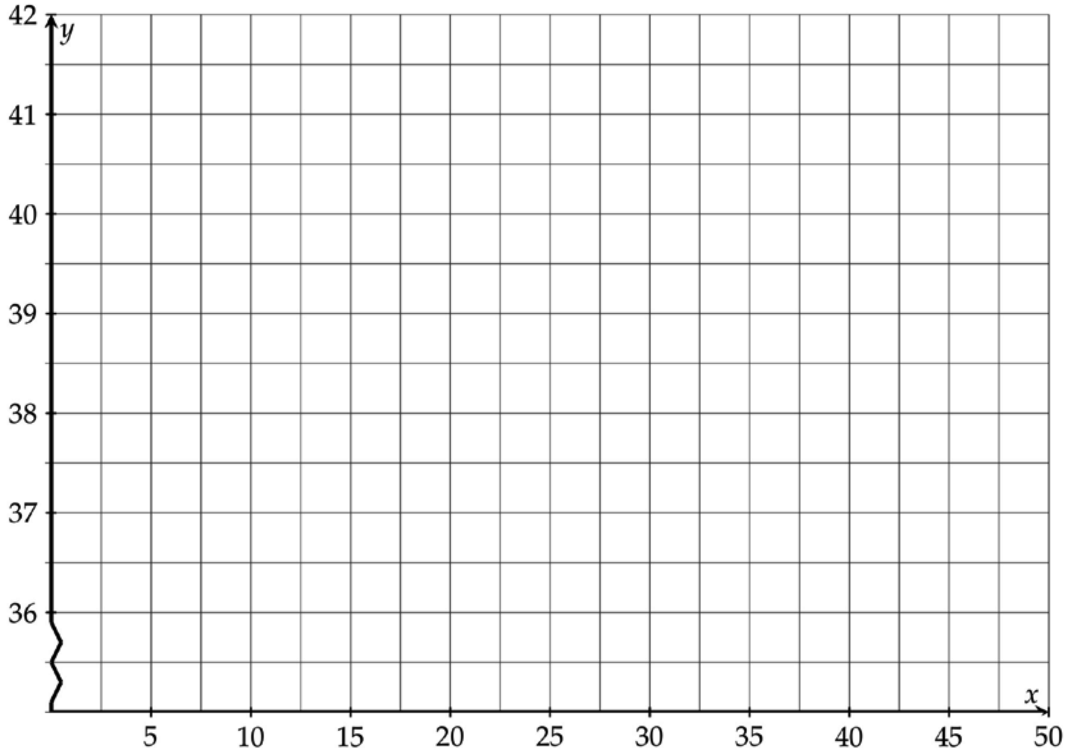
1.6 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/5**

x	0	2,5	5	10	15	25	30	40	50
t(*x*)	37		40,0		40,3		38,5		37,3

Zeichnen Sie unter Verwendung aller Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion *t* im Intervall $0 \leq x \leq 50$ in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.6



1.7 Nennen Sie drei Sachverhalte über den Verlauf der Körpertemperatur, die aus den Ergebnissen der Kurvenuntersuchung der Funktion *f* gefolgert werden können. **/3**

1.8 Zeigen Sie, dass *T* eine Stammfunktion von *t* ist. **/6**

$$T(x) = -(10x + 100) \cdot e^{-0,1x} + 37x$$

Berechnen Sie den Wert des Terms:

$$\frac{1}{45} \int_0^{45} t(x)\, dx$$

und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

1.9 Bei einer anderen Messung wird festgestellt, dass der Verlauf der Körpertemperatur besser beschrieben werden kann durch die Funktion: **/4**

$$h(x) = \frac{1}{12}(x^2 - 13) \cdot e^{-0,1x} + 37 \quad \text{für } x \geq 0$$

Ermitteln Sie, ab wann die durch *h* beschriebene Körpertemperatur größer ist als die durch *t* beschriebene Körpertemperatur.

2 Gebrochenrationale Funktionen /34

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+3}$.

Der Graph der Funktion ist G_f .

2.1 Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von *f* an. **/5**
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion *f* auf Polstellen.
Geben Sie das Verhalten des Graphen von *f* in deren Umgebung an.

2.2 Ermitteln Sie für den Graphen G_f die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. **/3**

2.3 Zeigen Sie, dass $a(x)=x-3$ die Gleichung der Asymptote des Graphen G_f ist. **/4**

2.4 Berechnen Sie die 2. Ableitung der Funktion *f.* **/3**
Sie können verwenden, dass eine mögliche Schreibweise der 1. Ableitung lautet
$f'(x)=\dfrac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}$.

[Zur Kontrolle: $f''(x)=\dfrac{8}{(x+3)^3}$]

2.5 Ermitteln Sie die Lage und die Art der Extrempunkte von G_f . **/6**

2.6 Zeigen Sie, dass gilt $f(5)=f(-2{,}5)$. **/5**

Skizzieren Sie den Graphen von *f* unter Verwendung aller bisher ermittelten Ergebnisse im Intervall [-8; 8] in dem **Koordinatensystem auf der folgenden Seite**.

Die Funktion *f* gehört zu einer Gruppe von Funktionen f_k mit $f_k(x)=\dfrac{x^2+k}{x+3}$, $k\in\mathbb{R}$.

2.7 Ermitteln Sie die Werte für k , so dass f_k eine hebbare Definitionslücke aufweist. **/3**

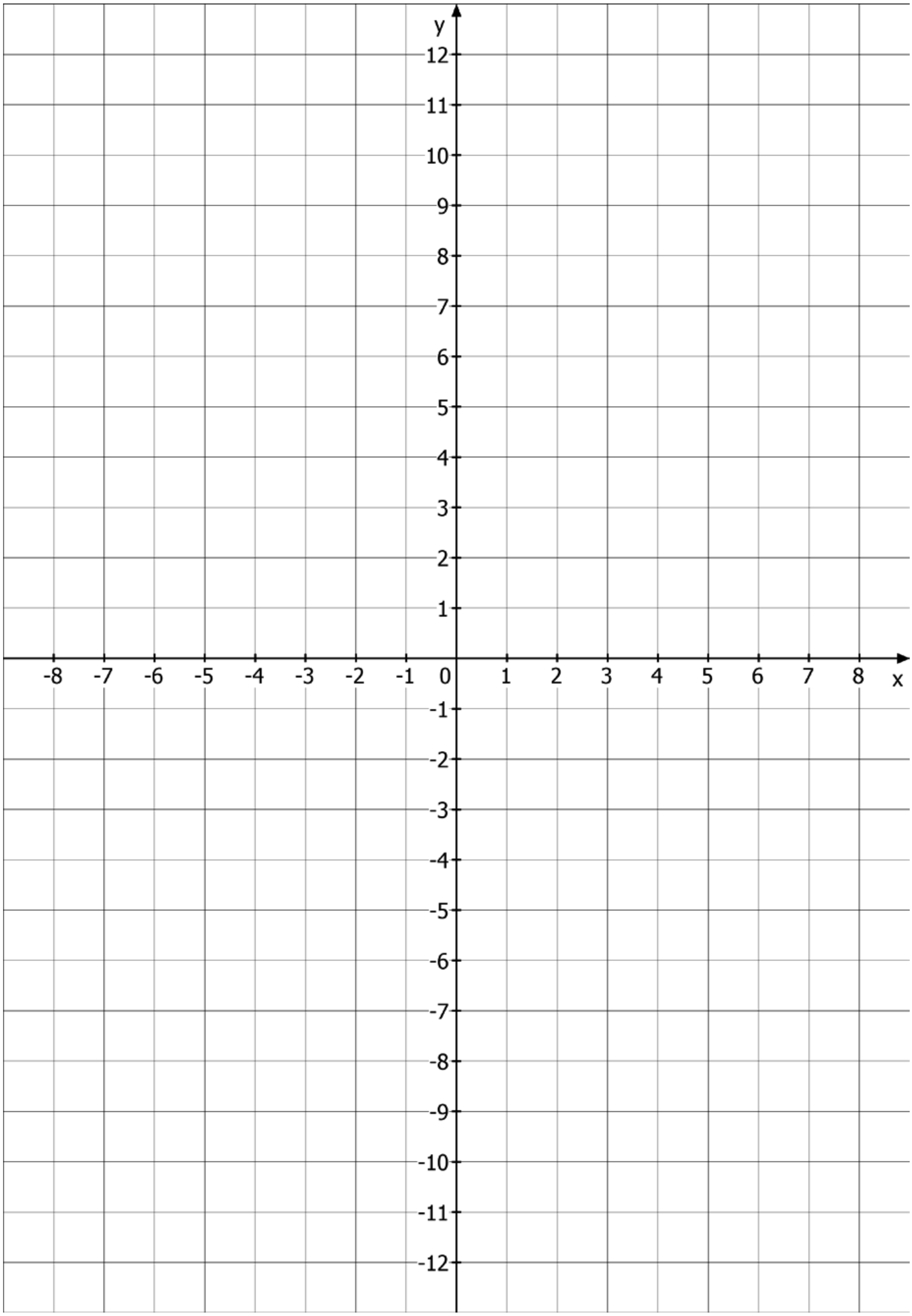
2.8 Die Tangenten an die Graphen von f_k an der Stelle $x=0$ werden mit t_k bezeichnet. **/5**

Weisen Sie nach, dass alle Tangenten t_k den gleichen Schnittpunkt mit der *x*-Achse haben.

Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden, dass gilt: $f_k'(x)=\dfrac{x^2+6x-k}{(x+3)^2}$.

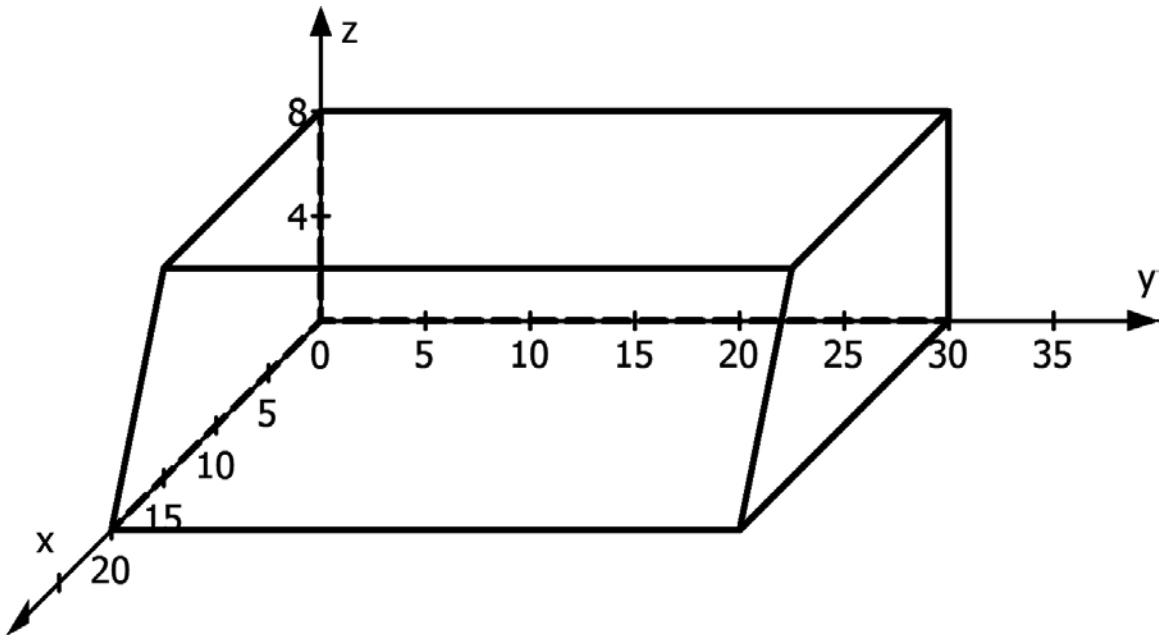
Fortsetzung auf der nächsten Seite

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.6:



3 Analytische Geometrie /33

Ein Veranstaltungsraum hat eine rechteckige Grundfläche mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(20|0|0)$, $C(20|30|0)$ und $D(0|30|0)$. Die Decke des Raums verläuft parallel zum Boden und hat die Eckpunkte $E(0|0|8)$, $F(15|0|8)$, $G(15|30|8)$ und $H(0|30|8)$.
Es gilt: 1 LE = 1 m.



3.1 Ermitteln Sie das Volumen des Raumes. **/3**

3.2 Berechnen Sie die Länge der Kante $\overline{CG}$. **/4**
Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die durch die Punkte *C* und *G* verläuft.

Im Punkt $L(3|2|5)$ befindet sich ein Laser, der Laserlicht in verschiedene Richtungen aussenden kann. Die Richtungen des Laserlichts lassen sich einstellen. Es können Strahlen und Flächen erzeugt werden.

3.3 **/4**
Der Laserstrahl wird in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 28 \\ 1 \end{pmatrix}$ eingestellt.

Der Laserstrahl trifft im Punkt *R* auf die Wand *CDHG*.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes *R*.
[Zur Kontrolle: $R(10|30|6)$].

Fortsetzung auf der nächsten Seite

3.4 Durch den Laser im Punkt L soll eine rote Fläche E_R erzeugt werden, die durch die Punkte $P(30\,|\,30\,|\,5)$ und $Q(5\,|\,30\,|\,3)$ verläuft. **/6**
Geben Sie eine Gleichung der Ebene E_R in Parameterform an.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E_R in Koordinatenform.
[Zur Kontrolle: $E_R: -28x + 27y + 350z = 1720$.]

3.5 Die Ebene E_R schneidet die Kante $\overline{CG}$ im Punkt S. **/4**
Berechnen Sie die Koordinaten von S.

3.6 Der Punkt $N(0\,|\,30\,|\,3)$ liegt nicht in der Ebene E_R. **/5**
Untersuchen Sie, ob der Punkt N oberhalb oder unterhalb der Ebene E_R liegt.

3.7 Berechnen Sie den Abstand vom Punkt R zur roten Fläche. **/2**

Es soll eine weitere grüne Fläche erzeugt werden.

Eine mögliche Ebenengleichung lautet: $E_G: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3.8 Weisen Sie nach, dass $\overrightarrow{n_G} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E_G ist. **/2**

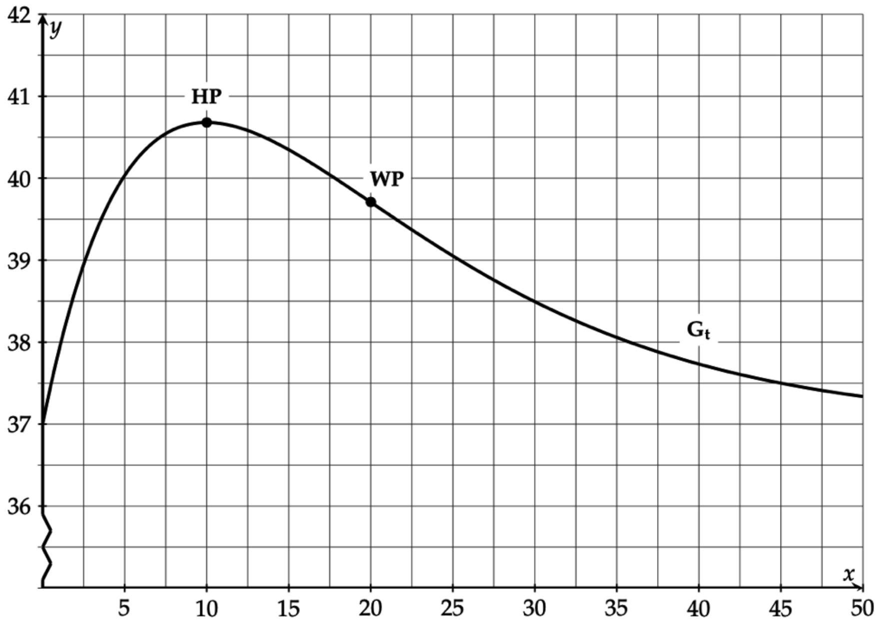
3.9 Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen roter und grüner Ebene. **/3**

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.1	*y*-Achsen Abschnitt: $S_y : f(0) = 0 \Rightarrow S_y(0\,\vert\,0)$ Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \underbrace{e^{-0,1x}}_{\neq 0} = 0 \rightarrow S_x = S_y(0\,\vert\,0)$	2		
1.2	Bilden der 1. Ableitung mittels Produkt- und Kettenregel: $f'(x) = 1 \cdot e^{-0,1x} - 0,1x \cdot e^{-0,1x} = (1 - 0,1x) \cdot e^{-0,1x}$	2		
1.3	Bedingung Extremstellen: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$ mögliche Extremstellen (notwendige Bedingung): $f'(x) = 0$ $(1-0,1x) \cdot e^{-0,1x} = 0 \quad \vert : e^{-0,1x} > 0$ $(1-0,1x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_E = 10}}$ Prüfen der Art der Extremstelle (hinreichende Bedingung): $f''(x) \neq 0$ $f''(10) \approx -0,0368 < 0 \rightarrow$ Maximum Angabe der Koordinaten des Extrempunkts: $f(10) \approx 3,68 \rightarrow \underline{\underline{H(10\,\vert\,3,68)}}$		3 2	
1.4	notwendige Bedingung prüfen: $f''(x) = 0$ $f''(20) = (-0,2 + 0,01 \cdot 20) \cdot e^{-0,1 \cdot 20} = 0 \rightarrow$ möglicher Wendepunkt Hinreichende Bedingung $f'''(x) \neq 0$ muss nicht überprüft werden. Angabe der Koordinaten des Wendepunkts: $f(20) \approx 2,71 \rightarrow \underline{\underline{W(20\,\vert\,2,71)}}$		3	
1.5	Tangente $y = m_t \cdot x + b$ am Punkt $P(-3,75\,\vert\,f(-3,75))$ bestimmen. Steigung: $m_t = f'(-3,75) = 2,0$ Punktprobe: $-5,5 = 2,0 \cdot (-3,75) + b \Leftrightarrow b = 2$ Tangente: $g(x) = 2x + 2$		3	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.6</td><td>

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>2,5</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>25</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td></tr>
<tr><td>t(x)</td><td>37</td><td>38,9</td><td>40,0</td><td>40,7</td><td>40,3</td><td>39,1</td><td>38,5</td><td>37,7</td><td>37,3</td></tr>
</table>



</td><td>2

3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.7</td><td>mögliche Antworten:
– höchste Körpertemperatur nach 10 Stunden (Extremstelle, Maximum)
– Höchsttemperatur bei 40,7 °C (Hochpunkt von t, weil $y_{E_t} = y_{E_f} + 37 = 3{,}68 + 37$)
– 20 Stunden nach Ausbruch der Krankheit ändert sich die Körpertemperatur am stärksten (Wendestelle).</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.8</td><td>z. z: $T'(x) = t(x)$

$$T'(x) = -10 \cdot e^{-0{,}1x} + (-0{,}1) \cdot (-10x - 100) \cdot e^{-0{,}1x} + 37$$
$$= -10 \cdot e^{-0{,}1x} + x \cdot e^{-0{,}1x} + 10 \cdot e^{-0{,}1x} + 37$$
$$= x \cdot e^{-0{,}1x} + 37 = t(x)$$

$$\frac{1}{45} \cdot \int_0^{45} t(x)dx = \frac{1}{45} \cdot \left[T(45) - T(0)\right]$$
$$= \frac{1}{45} \cdot \left[1658{,}89 - (-100)\right]$$
$$= \frac{1758{,}89}{45} = 39{,}09$$

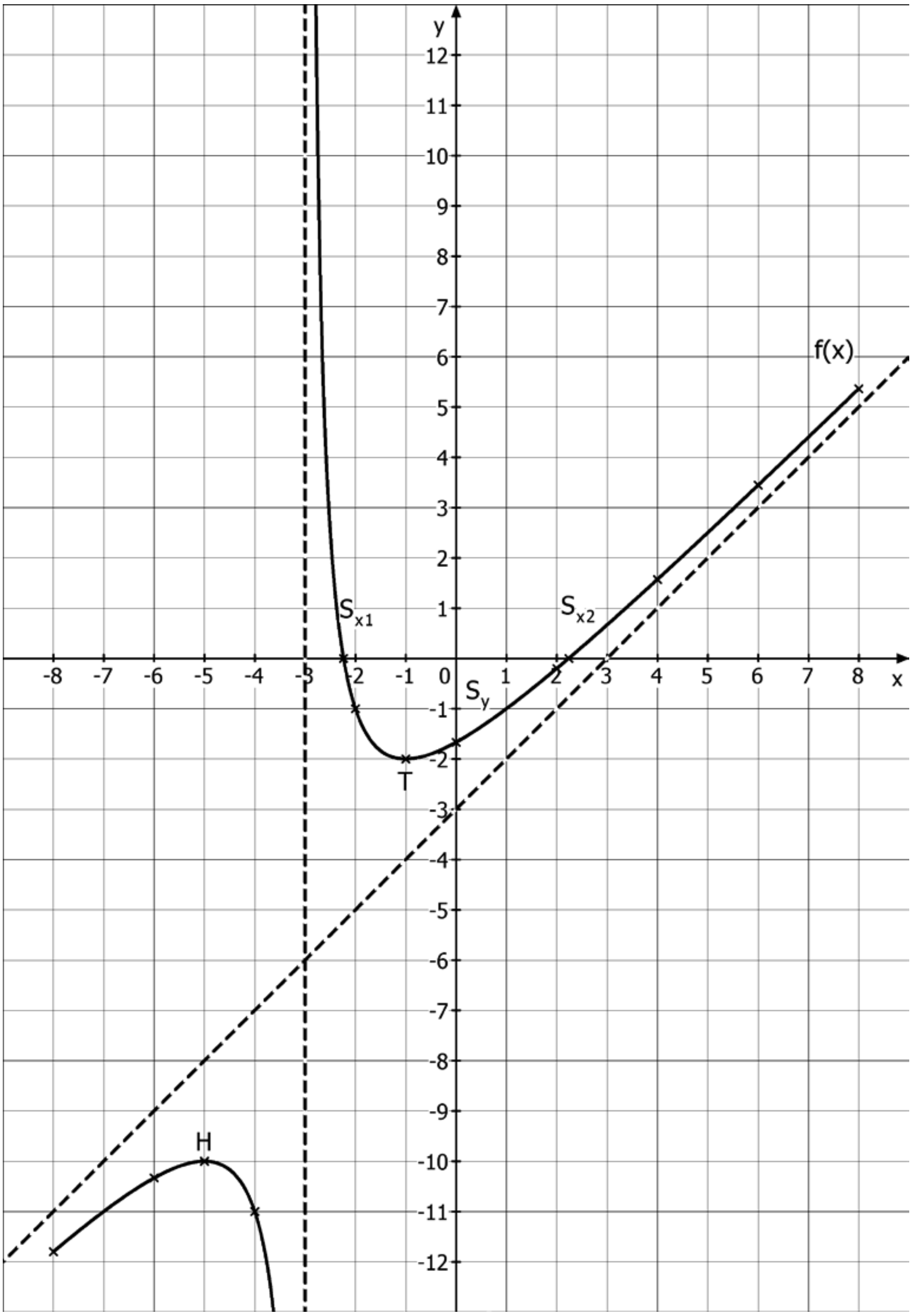
Die Körpertemperatur lag in den ersten 45 Stunden nach Ausbruch der Krankheit <u>durchschnittlich</u> bei 39,1 °C.</td><td></td><td>3

3</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	II	III
1.9	Zu zeigen: $h(x) > t(x)$ für alle $x > a$ Rechnung: $h(x) = t(x) \Leftrightarrow \frac{1}{12}(x^2 - 13) \cdot \underbrace{e^{-0{,}1x}}_{\neq 0} + 37 = x \cdot \underbrace{e^{-0{,}1x}}_{\neq 0} + 37$ $\Leftrightarrow \frac{1}{12}x^2 - x - \frac{13}{12} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 13}} \wedge x_2 = -1$ (x_2 nicht relevant) Testeinsetzung für z. B. $x = 14 > 13$ ergibt: $h(14) - t(14) = +0{,}308 > 0$ Damit ist $h(x) > t(x)$ für alle $x > 13$. Hinweis: Eine graphische Lösung durch Zeichnen des Graphen und entsprechende Testeinsetzungen ist auch möglich.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**9**	**20**	**4**
	Summe der BE		**33**	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>$N(x)=0$
$0=x+3$
$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$
$Z(-3)\neq 0 \Rightarrow$ der Graph von f hat eine Polstelle
Verhalten an der Polstelle (Testeinsetzungen): VZW von $-\infty$ nach $+\infty$</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>$S_y:\ f(0)=-\frac{5}{3} \Rightarrow S_y\left(0\,|-\frac{5}{3}\right)$

$S_x: Z(x)=0$
$0=x^2-5$
$x_{1/2}=\pm\sqrt{5} \Rightarrow S_{x_1}\left(-2{,}24\middle|0\right)$ und $S_{x_2}\left(2{,}24\middle|0\right)$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>durch Polynomdivision:
$(x^2+0x-5):(x+3)=x-3+\frac{4}{x+3}$
$\underline{-(x^2+3x)}$
$-3x-5$
$\underline{-(-3x-9)}$
4
Asymptote: $a(x)=x-3$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>2. Ableitung:
$f''(x)=\frac{(2x+6)(x+3)^2-2(x+3)(x^2+6x+5)}{(x+3)^4}$
$=\frac{(2x+6)(x+3)-2(x^2+6x+5)}{(x+3)^3}$
$=\frac{8}{(x+3)^3}$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>notwendige Bedingung:
$f'(x)=0$
$0=x^2+6x+5$
$x_{1/2}=-3\pm\sqrt{9-5}$
$x_1=-5$ und $x_2=-1$
hinreichende Bedingung:
$f''(x_1)=-1<0: HP$
$f''(x_2)=1>0: TP$
$H(-5|-10)$
$T(-1|-2)$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
2.6	$f(5)=\frac{5^2-5}{5+3}=\frac{10}{4}$ $f(-2{,}5)=\frac{(-2{,}5)^2-5}{-2{,}5+3}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{10}{4}$	1		
			4	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.7	$N(x)=0$ $x=-3$ $Z(-3)=0$ $k=-9$ Für $k=-9$ hat f_k eine hebbare Definitionslücke.			3
2.8	Tangente bestimmen: $m_t=f_k'(0)=\frac{-k}{9}$ $\quad n_t=f_k(0)=\frac{k}{3}$ $t_k(x)=\frac{-k}{9}x+\frac{k}{3}$			3
	Schnittpunkt mit der x-Achse: $t_k(x)=0$ $0=\frac{-k}{9}x+\frac{k}{3}$ $x_1=3$ $t_k(3)=\frac{-k}{3}+\frac{k}{3}=0$ Alle Tangenten schneiden die x-Achse im Punkt (3|0).			2
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**10**	**16**	**8**
	Summe der BE	**34**		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.1	Volumen Quader: $V_Q = 15 \cdot 30 \cdot 8 = 3600\,\text{m}^3$ Volumen Prisma: $V_P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 30 \cdot 8 = 600\,\text{m}^3$ Volumen des Raumes: 4200 m³.	3		
3.2	$\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\left\lvert\overrightarrow{CG}\right\rvert = \sqrt{25+64} = \sqrt{89} \approx 9{,}43\,\text{m}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$	2 2		
3.3	$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 28 \\ 1 \end{pmatrix}$ rechte Wand: W: $y = 30$ $h = W$ $2 + 28r = 30$ $r = 1$ in h einsetzen: $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 28 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 6 \end{pmatrix}$		4	
3.4	Ebenengleichung in Parameterform: $E_R: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + s \cdot \overrightarrow{LP} + t \cdot \overrightarrow{LQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 28 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 28 \\ -2 \end{pmatrix}$ Ebenengleichung in Koordinatenform: $\vec{n} = \overrightarrow{LP} \times \overrightarrow{LQ} = \begin{pmatrix} -56 \\ 54 \\ 700 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -28 \\ 27 \\ 350 \end{pmatrix}$, somit gilt: E_R: $-28x + 27y + 350z = d$ Einsetzen der Koordinaten von L liefert: $d = 1720$ $E_R: -28x + 27y + 350z = 1720$	2	4	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.5	$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}20\\30\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\8\end{pmatrix}$ in $E_R:-28x+27y+350z=1720$ $-28(20-5r)+27\cdot 30+350(8r)=1720$ $r=0{,}5$ in g einsetzen: $S\left(17{,}5\middle\vert 30\middle\vert 4\right)$		4	
3.6	N liegt auf der Kante $\overline{DH}$: $k:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\30\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ k in E_R einsetzen: $-28\cdot 0+27\cdot 30+350\cdot r=1720$ $350\cdot r=910$ $r=2{,}6$ Schnittpunkt von k und E_R ist $T\left(0\middle\vert 30\middle\vert 2{,}6\right)$. Somit liegt $N\left(0\middle\vert 30\middle\vert 3\right)$ oberhalb von E_R.			5
3.7	Abstand zwischen Punkt R und der Ebene E_R: $d=\left\vert\frac{-28\cdot 10+27\cdot 30+350\cdot 6-1720}{\sqrt{(-28)^2+27^2+350^2}}\right\vert=\frac{910}{\sqrt{124013}}\approx 2{,}58\,\text{m}$	2		
3.8	$\overrightarrow{n_G}=\begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\8\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\-15\\0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}8\\-3\\0\end{pmatrix}$			2
3.9	Schnittwinkel: $\overrightarrow{n_G}=\begin{pmatrix}8\\-3\\0\end{pmatrix}\quad\overrightarrow{n_R}=\begin{pmatrix}-28\\27\\350\end{pmatrix}$ $\cos(\alpha)=\frac{\left\vert\overrightarrow{n_R}\cdot\overrightarrow{n_G}\right\vert}{\left\vert\overrightarrow{n_R}\right\vert\cdot\left\vert\overrightarrow{n_G}\right\vert}=\frac{305}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{124.013}}\approx 0{,}10137$ $\alpha=84{,}18°$		3	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**11**	**15**	**7**
	Summe der BE		**33**	

Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule/FOS 13 im Schuljahr 2022/2023

Fach	**Mathematik (B)**
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	**31.05.2023**
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	**Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt.**
Erwartungs-horizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	**Soll**
1	33
2	34
3	33
Summe:	100

1 Exponentialfunktion /33

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Gleichung $f(x) = 4x \cdot e^{-0,5x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$.
Ihr Graph ist mit G_f bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstelle von *f*. **/2**

1.2 Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f. **/7**

[Zur Kontrolle: $f'(x) = 4(-x^2 + 1) \cdot e^{-0,5x^2}$; ohne Nachweis darf verwendet werden:

$f''(x) = 4(x^3 - 3x)\ e^{-0,5x^2}$]

1.3 Zeigen Sie, dass der Graph von *f* punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. **/5**

Geben Sie das Symmetrieverhalten der Graphen von f' und f'' an.

1.4 Ergänzen Sie die Wertetabelle. Runden Sie auf eine Kommastelle. **/6**

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	0			1,9			0,1

Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller Ihrer bisherigen Ergebnisse im Intervall **$-3 \leq x \leq 3$** in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**.

1.5 Ermitteln Sie die Wendestelle x_W für die $x_W > 0$ gilt. **/5**

[Hinweis: Auf den Nachweis mit dem hinreichenden Kriterium kann verzichtet werden.]

Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente an dieser Stelle.

[Hinweis: Rechenergebnisse können auf eine Stelle nach dem Komma gerundet werden.]

1.6 Der Graph G_g der Funktion *g* entsteht durch die Spiegelung des Graphen G_f an der *x*-Achse. **/3**

Zeichnen Sie auch G_g im Intervall **$-3 \leq x \leq 3$** in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite** ein.

Geben Sie eine Gleichung der Funktion *g* an.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

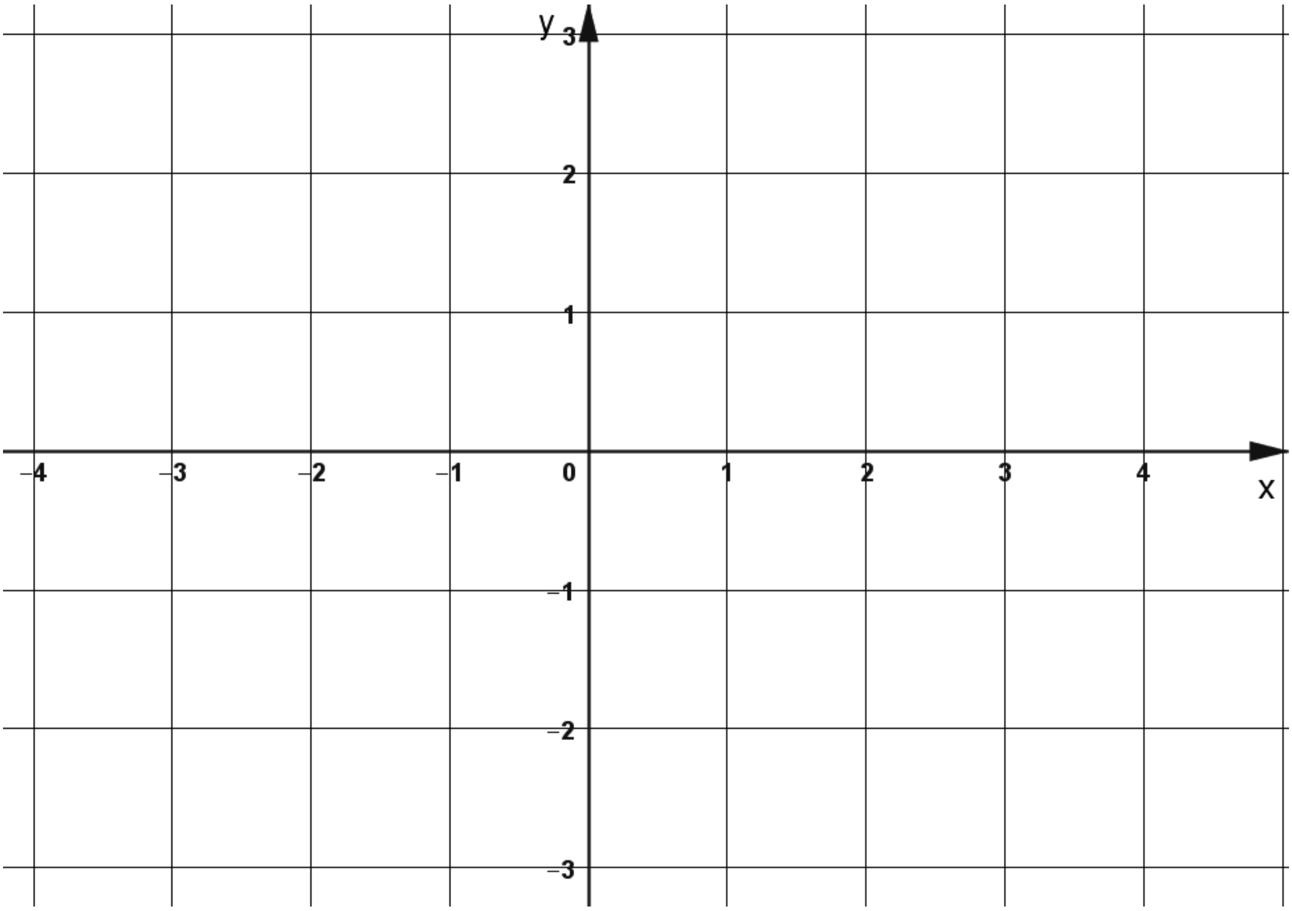
1.7 Weisen Sie nach, dass $F(x) = -4 \cdot e^{-0,5x^2}$ eine Stammfunktion von *f* ist. **/5**

Für jeden Wert *m* > 0 schließen die Graphen der Funktionen *f* und *g* und die Geraden $x = m$ und $x = -m$ eine Fläche ein.

Ermitteln Sie den Term *A*(*m*), der den Flächeninhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von *m* beschreibt.

Untersuchen Sie das Verhalten von *A*(*m*) für $m \to \infty$.

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4 und 1.6



2 Gebrochenrationale Funktionen /34

Gegeben ist die Funktion *f* mit

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x^2 + 24x - 16}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x-4)\left(x^2 - 5x + 4\right)}{x^2 - 4x + 4}.$$

2.1 Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion *f* an. **/5**
Weisen Sie nach, dass der Graph eine Polstelle hat.
Bestimmen Sie das Verhalten des Graphen von *f* in der Umgebung der Polstelle.

2.2 Geben Sie den Schnittpunkt des Graphen von *f* mit der *y*-Achse an. **/4**
Ermitteln Sie alle Nullstellen der Funktion *f*.

2.3 Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktionsgleichung von *f* geschrieben werden kann in der Form **/6**

$$f(x) = x - 5 + \frac{4}{(x-2)^2}.$$

Geben Sie die Gleichung der Asymptoten von *f* an.
Zeichnen Sie die Asymptote in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite** ein.
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von *f* für $x \to \pm\infty$ an.

2.4 Ermitteln Sie die erste Ableitung von *f*. **/3**
Verwenden Sie dabei die Schreibweise der Funktionsgleichung von *f* aus Teilaufgabe 2.3.

[Zur Kontrolle: *f* ‘ kann geschrieben werden in der Form $f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-2)^3}$.]

2.5 Weisen Sie nach, dass der Graph von *f* genau einen Extrempunkt hat. **/4**
Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunktes.

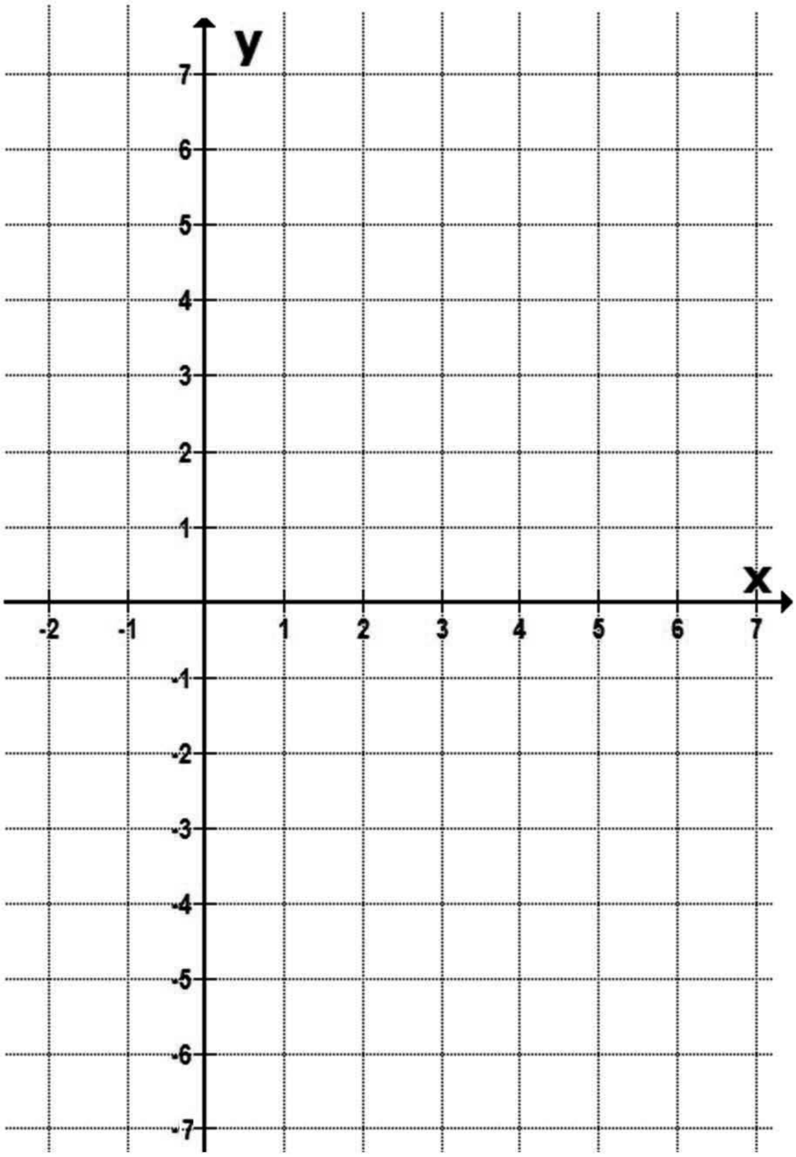
[Hinweis: Ohne weitere Rechnung dürfen Sie verwenden $f''(x) = \frac{24}{(x-2)^4}$.]

2.6 Ergänzen Sie die Wertetabelle. Runden Sie auf eine Nachkommastelle. **/6**

x	-2	-1	0	1	3	4	5	7
$f(x)$		-5,6						2,2

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer oben berechneten Ergebnisse und der Wertetabelle den Graphen von *f* im Intervall [-2; 7] in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite** ein.

Fortsetzung auf der nächsten Seite



2.7 Ermitteln Sie eine Stammfunktion *F* von *f*. **/2**

Verwenden Sie dabei die Schreibweise der Funktionsgleichung von *f* aus Teilaufgabe 2.3.

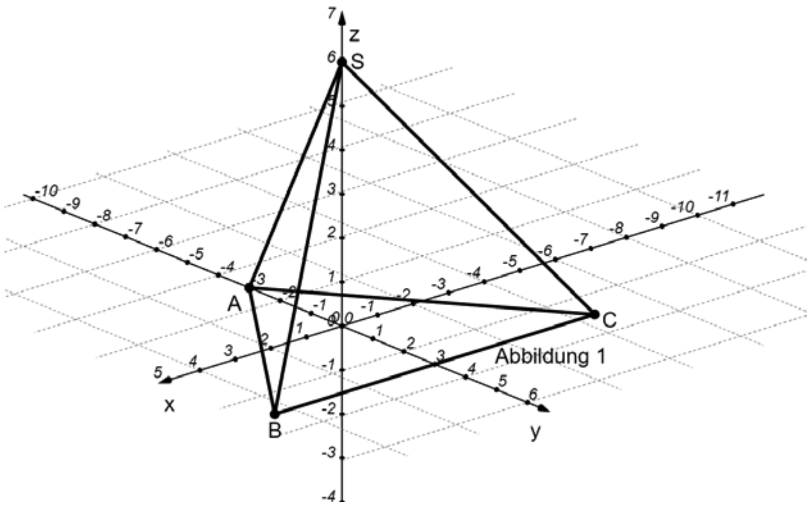
2.8 Der Graph von *f*, die Gerade mit der Gleichung $g(x) = x - 1$ und die *x*-Achse schließen eine Fläche ein. **/4**

Begründen Sie, dass der Flächeninhalt dieser Fläche kleiner als 3 FE sein muss.
Beschreiben Sie, wie der Flächeninhalt dieser Fläche exakt berechnet werden kann.

[Hinweis: Der Flächeninhalt muss dabei nicht ausgerechnet werden.]

3 Analytische Geometrie /33

Die Grundfläche einer Pyramide *ABCS* ist das Dreieck *ABC*. Die Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide sind *A*(0|-3|0), *B*(4,5|3|0), *C*(-4,5|3|0) und *S*(0|0|6) (siehe Abbildung 1).



3.1 Weisen Sie nach, dass das Dreieck *ABC* gleichschenklig ist. **/3**

3.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* und das Volumen der Pyramide. **/5**

3.3 Die Richtung paralleler Sonnenstrahlen kann beschrieben werden durch den Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Die Spitze *S* der Pyramide hat einen Schattenpunkt *S** in der *x*-*y*-Ebene. **/3**

Ermitteln Sie die Koordinaten von *S**.

3.4 Das Dreieck *BCS* liegt in einer Ebene *E*. **/6**

Geben Sie eine Gleichung der Ebene *E* in Parameterform an.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene *E* in Koordinatenform.

[*Zur Kontrolle*: *E*: 2*y* + *z* = 6.]

3.5 Für einen Punkt *P* in der Ebene *E* ist der Abstand zum Punkt *A* minimal. **/6**

Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes *P* und seinen Abstand zum Punkt *A*.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Die Ebene *F* mit der Gleichung F: $2x - 3y + 3z = 6$ schneidet die Pyramide *ABCS*.

3.6 Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ebene *F* mit den drei Koordinatenachsen. **/3**

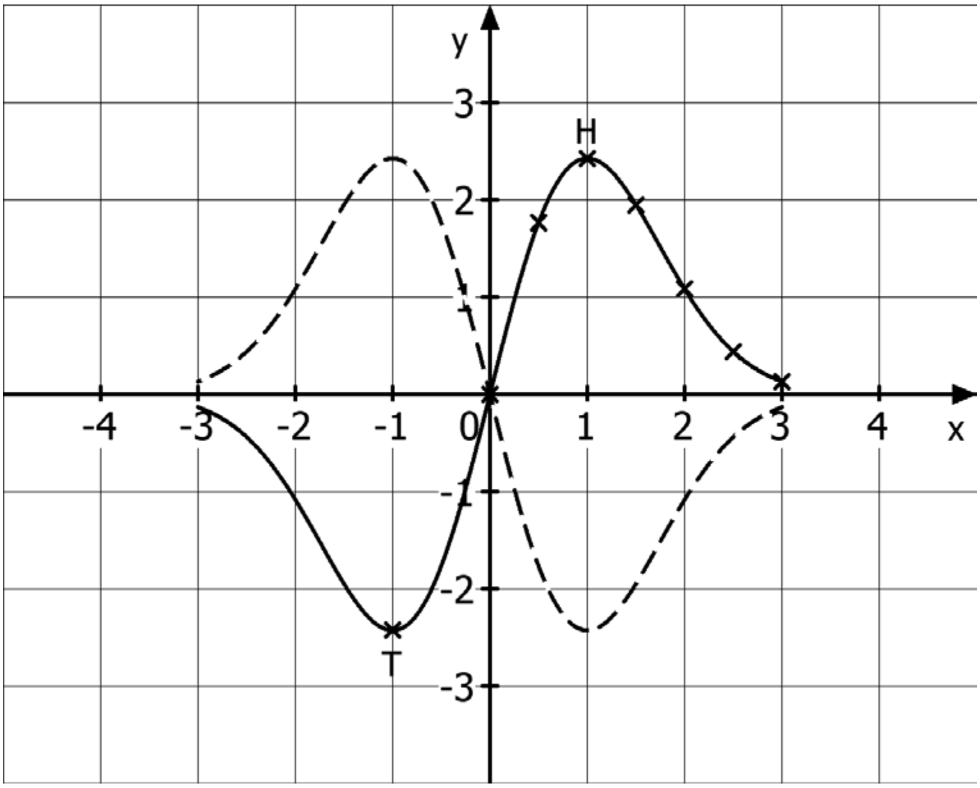
3.7 Berechnen Sie den Winkel zwischen der Ebene *E* und der Ebene *F*. **/3**

3.8 Die Gerade durch die Punkte *C* und *S* hat einen Schnittpunkt *Q* mit der Ebene *F*. **/4**

Untersuchen Sie, ob dieser Schnittpunkt innerhalb der Strecke $\overline{CS}$ liegt.

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
1.1	$f(x)=0$ $4x\cdot e^{-0,5x^2}=0$ $x=0$	2		
1.2	$f'(x)=4\cdot e^{-0,5x^2}+4x\cdot(-x)\cdot e^{-0,5x^2}=\left(4-4x^2\right)e^{-0,5x^2}$ notwendiges Kriterium: $f'(x)=0$ $0=4\left(-x^2+1\right)e^{-0,5x^2}$ $0=-x^2+1$ $x_{1/2}=\pm 1$ hinreichendes Kriterium: $f'(x)=0\wedge f''(x)\neq 0$ $f''(1)<0$ (Maximum); $f''(-1)>0$ (Minimum) $f(1)\approx 2,4;\ f(-1)\approx -2,4;\ H(1\mid 2,4);\ T(-1\mid -2,4)$	3	4	
1.3	$f(-x)=4\cdot(-x)\cdot e^{-0,5\cdot(-x)^2}=-4x\cdot e^{-0,5x^2}=-f(x)$ Damit ist der Graph von *f* punktsymmetrisch zum Ursprung. f' ist achsensymmetrisch zur *y*-Achse. f'' ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.	3	2	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.4</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td><td>2,5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td>1,8</td><td>2,4</td><td>1,9</td><td>1,1</td><td>0,4</td><td>0,1</td></tr>
</table>


Hinweis: Der gestrichelt dargestellte Graph gehört zur Aufgabe 1.6</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>notwendiges Kriterium: $f''(x) = 0$
$0 = 4(x^3 - 3x)e^{-0,5x^2}$
$x(x^2 - 3) = 0$
$x_1 = 0 \wedge x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$
$x_W = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ ist gesuchte Lösung
hinreichendes Kriterium: entfällt
$f'(\sqrt{3}) \approx -1{,}8;\ f(\sqrt{3}) \approx 1{,}6$
Damit ergibt sich Wendetangente: $y = -1{,}8x + 4{,}6$</td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>Zeichnung siehe Graph zu 1.4
Gleichung: $g(x) = -f(x) = -4x \cdot e^{-0,5x^2}$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.7	z. z.: $F'(x) = f(x)$ $F'(x) = -4 \cdot (-x) \cdot e^{-0,5x^2} = 4x \cdot e^{-0,5x^2} = f(x)$ Aufgrund der Achsensymmetrie der Graphen G_f und G_g zur x-Achse und der Punktsymmetrie zum Ursprung beider Graphen, genügt es, einen Term für das Integral $\int_0^m f(x)\,dx$ aufzustellen. Das Vierfache dieses Terms ist dann $A(m)$: $A(m) = 4 \cdot \int_0^m 4x \cdot e^{-0,5x^2}\,dx = 4\left[-4 \cdot e^{-0,5x^2}\right]_0^m$ $A(m) = 4\left(-4 \cdot \left(e^{-0,5m^2} - 1\right)\right) = -16\left(e^{-0,5m^2} - 1\right)$ Dass die Klammer den Grenzwert -1 hat, kann sowohl durch Testeinsetzungen, als auch durch $\lim\limits_{m\to\infty} e^{-0,5m^2} = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{e^{0,5m^2}} = 0$ begründet werden. Der Grenzwert ist also 16.			2 3
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**13**	**15**	**5**
	Summe der BE	**33**		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
2.1	$N(x)=0 \Leftrightarrow 0=x^2-4x+4=(x-2)^2 \Rightarrow x_{1/2}=2$ doppelte Lösung $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{2\}$ $Z(2)=4\neq 0 \Rightarrow$ Polstelle bei $x=2$ ohne VZW, da $x=2$ eine doppelte Lösung von $N(x)=0$ ist. (alternativ: Testeinsetzungen)	5		
2.2	Schnitt mit der *y*-Achse: $f(0)=-4 \Rightarrow S_y(0\,\|-4)$ Bedingung Nullstelle: $f(x_N)=0 \Leftrightarrow Z(x_N)=0$ Rechnung: $\underbrace{(x-4)}_{\Rightarrow x_1=4}\underbrace{(x^2-5x+4)}_{\text{pq-Formel}}=0$ Mit der pq-Formel folgt: $x_{2/3}=2{,}5\pm\sqrt{2{,}25}\Rightarrow x_2=4;\ x_3=1$. Es gibt zwei Nullstellen $x_1=x_2=4;\ x_3=1$.	1	3	
2.3	Nachweis durch Erweitern mit $(x-2)^2$: $x-5+\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{(x-5)(x^2-4x+4)+4}{x^2-4x+4}=\frac{(x^3-9x^2+24x-16)}{x^2-4x+4}$ Nachweis alternativ mittels Polynomdivision möglich: $(x^3-9x^2+24x-16):(x^2-4x+4)=x-5+\frac{4}{x^2-4x+4}$ Die Asymptote ist $a(x)=x-5$. Zeichnen der Asymptote. Verhalten der Funktionswerte von *f* im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}a(x)=+\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}a(x)=-\infty$	2 1	3	
2.4	Anwenden der Quotientenregel: $f'(x)=\left[x-5+4(x-2)^{-2}\right]'=1+(-2)\cdot 4\cdot(x-2)^{-3}=1-\frac{8}{(x-2)^3}$		3	

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III

2.5

Bedingung Extremstellen: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

mögliche Extremstellen (notwendige Bedingung): $f'(x) = 0$

$$1 - \frac{8}{(x-2)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_E = 4 \in ID_f}}$$

Prüfen der Art der Extremstelle (hinreichende Bedingung): $f''(x) \neq 0$

$$f''(x) = \frac{24}{(4-2)^4} = 1{,}5 > 0$$, also Tiefpunkt

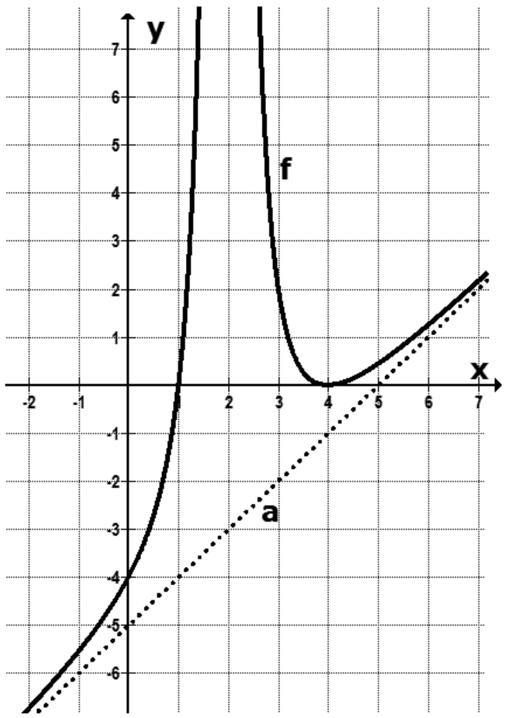
Angabe der Koordinaten des Extrempunkts: $f(4) = 0$; $\underline{\underline{T(4\,|\,0)}}$

BE/AB: II: 4

2.6

x	-2	-1	0	1	3	4	5	7
$f(x)$	**-6,8**	-5,6	**-4**	**0**	**2**	**0**	**0,4**	2,2

BE/AB: I: 3



BE/AB: II: 3

Hinweis: Die Grafik beinhaltet die Lösungen der Teilaufgaben 2.3 und 2.6

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.7	Eine Stammfunktion von f in der vorgegebenen Darstellungsform ist: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{4}{x-2}$		2	
2.8	Die Fläche ist enthalten in dem Dreieck mit den Eckpunkten (1|0), (3|2) und (4|0). Dieses Dreieck hat einen Flächeninhalt von $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ FE . Die Schnittpunkte von *f* und *g* sind (1|0) und (3|2). Im Intervall [1;3] begrenzt die Gerade *g* die Fläche, im Intervall [3;4] begrenzt der Graph von *f* die Fläche. Für diese beiden Intervalle müssen die Integrale über *g* bzw. *f* berechnet werden.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**12**	**18**	**4**
	Summe der BE		**34**	

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.1	Es ist $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left(\sqrt{(-4{,}5)^2 + 6^2} = \sqrt{56{,}25}\right)$, also ist das Dreieck ABC gleichschenklig.	3		
3.2	Grundfläche mittels Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix}$ $A = \frac{1}{2} \cdot \left\|\vec{n}\right\| = \frac{1}{2} \cdot 54 = 27\ (\text{FE})$ Eine alternative Lösung mittels $A = \frac{g \cdot h_g}{2}$ ist auch möglich. $h_{Pyramide} = z_s = 6,\ V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h_{Pyramide} = 54\ (\text{VE})$	3 2		
3.3	$g_s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $z = 0$ also $s = 2$; $S^*(2\|6\|0)$.	3		
3.4	Ebenengleichung in Parameterform: z. B. $E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OS} + s \cdot \overrightarrow{SB} + t \cdot \overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ Ebenengleichung in Koordinatenform: Ein Normalenvektor ist $\vec{n} = \overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 54 \\ 27 \end{pmatrix} = 27 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit ist $E\colon 2y + z = d$. Einsetzen des Punktes S liefert $E\colon 2y + z = 6$.		2 4	
3.5	Der Abstand wird minimal, wenn die Gerade durch P und A senkrecht auf E steht. Aufstellen der Geradengleichung durch P und A mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor: $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $h \cap E \Rightarrow 2(-3 + 2s) + 1s = 6 \Rightarrow s = 2{,}4$. Also $P(0\|1{,}8\|2{,}4)$ und $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{4{,}8^2 + 2{,}4^2} \approx 5{,}37\ (\text{LE})$		4 2	
3.6	$S_x(3\|0\|0)$; $S_y(0\|-2\|0)$; $S_z(0\|0\|2)$	3		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.7	Schnittwinkel: $\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{n_F}=\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$ $\cos(\alpha)=\frac{\left\|\overrightarrow{n_E}\cdot\overrightarrow{n_F}\right\|}{\left\|\overrightarrow{n_E}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_F}\right\|}=\frac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{22}}\approx 0{,}286$ $\alpha=73{,}4°$		3	
3.8	$g_{CS}\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-4{,}5\\3\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4{,}5\\-3\\6\end{pmatrix}$, in F einsetzen: $2(-4{,}5+4{,}5r)-3(3-3r)+3(6r)=6,\ r=\frac{2}{3},\ Q(-1{,}5\mid 1\mid 4).$ Weil $0\le r\le 1$ erfüllt ist, liegt der Punkt auf der Strecke $\overline{CS}$.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**14**	**15**	**4**
	Summe der BE		**33**	