Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie

Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule im Schuljahr 2020/2021

Fach	**Mathematik (A)**
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	**06. Mai 2021**
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	**Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt zu den Wahlmöglichkeiten.**
Erwartungs-horizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	**Soll**
1	34
2	33
3	33
Summe[1]:	Je nach Wahl 67 oder 66

[1] Jeder Prüfling bearbeitet nur zwei Aufgaben.

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2021
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 Exponentialfunktionen /34

Die Wassermenge in einem Stausee verändert sich, weil Wasser zufließt und abfließt. Zunächst wird er mit Wasser gefüllt. Die in einem Monat zugelaufene Wassermenge kann durch die Zulauffunktion *z* mit

$$z(x) = \left(0{,}01x^2 - x + 25\right)e^{0{,}05x}$$

beschrieben werden.
Dabei gibt *x* die Anzahl der Monate nach Beobachtungsbeginn an und *z*(*x*) die in dem Monat *x* zugelaufene Wassermenge in Tausend Kubikmetern. Betrachtet wird für *x* das Intervall $[0\,|\,60]$.
Geben Sie alle Ergebnisse mit 2 Nachkommastellen an.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion z. /6
Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstelle im Sachzusammenhang.

1.2 Zeigen Sie, dass /3
$z'(x) = \left(0{,}0005x^2 - 0{,}03x + 0{,}25\right)e^{0{,}05x}$ die 1. Ableitung der Funktion *z* ist.

1.3 Bestimmen Sie, in welchem Monat im betrachteten Intervall die zulaufende Wassermenge maximal wird. /8
Geben Sie an, welche Wassermenge zu diesem Zeitpunkt zufließt.
[Hinweis: Ohne Herleitung dürfen Sie verwenden:.
$z''(x) = \left(0{,}000025x^2 - 0{,}0005x - 0{,}0175\right)e^{0{,}05x}$*.]*

1.4 Für $10 < x < 50$ nimmt der Zulauf ab. /5
Bestimmen Sie, in welchem Monat der Zulauf am stärksten abnimmt.
[Hinweis: Auf einen Nachweis mit Hilfe der 3. Ableitung kann verzichtet werden.]

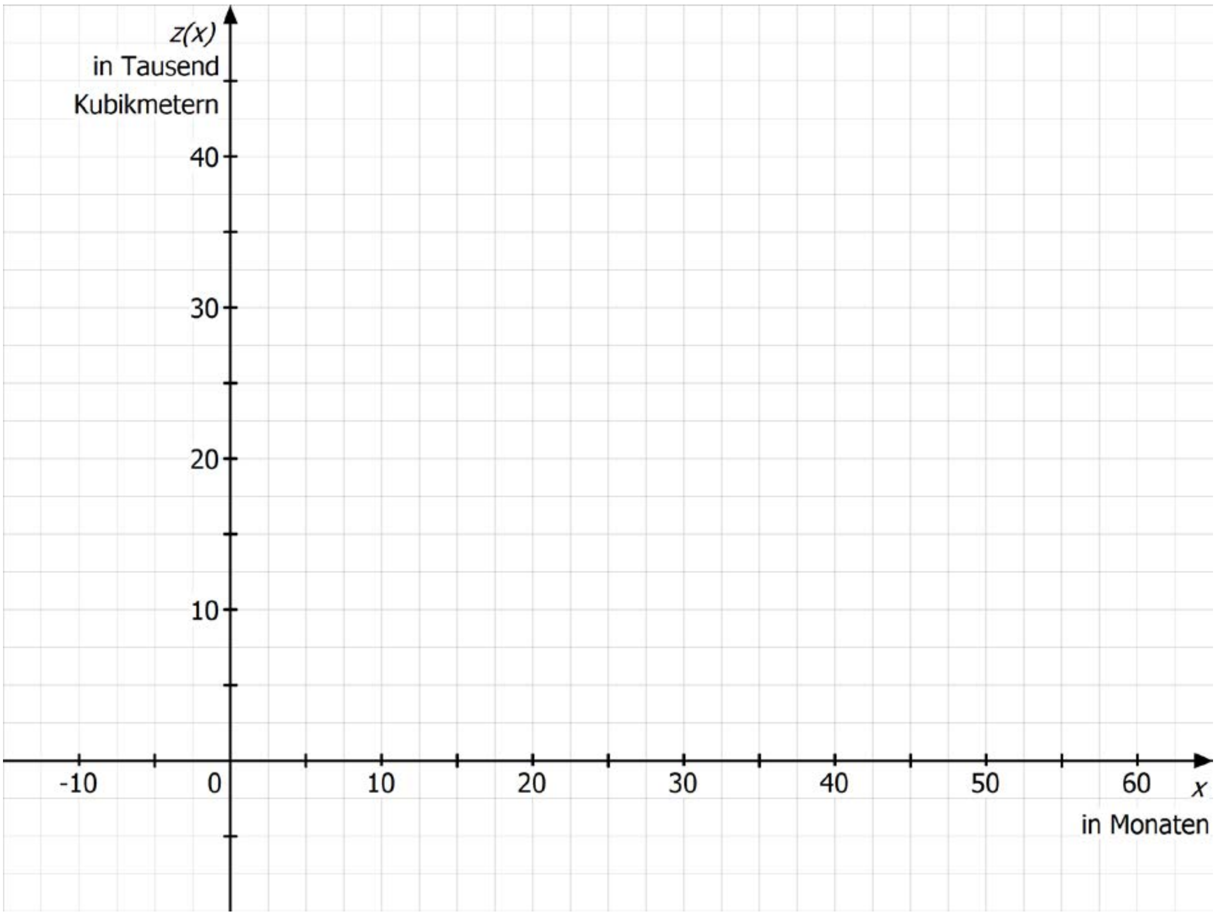
1.5 Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von *z* im Intervall $[0\,|\,60]$ mit Hilfe Ihrer Ergebnisse sowie der nachfolgenden Wertetabelle in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**. /5

x	0	10	20	30	40	50	60
***z*(*x*)**					7,39		20,09

1.6 Zeigen Sie, dass die Funktion $Z(x) = \left(0{,}2x^2 - 28x + 1060\right)e^{0{,}05x}$ eine mögliche Stammfunktion von $z(x)$ ist. /7
Berechnen Sie die Wassermenge, die innerhalb des ersten Jahres insgesamt in den Stausee fließt.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.5



2 Gebrochenrationale Funktion /33

Gegeben ist die Funktion *f* durch die Gleichung $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{2x + 2}$.

Der Graph der Funktion ist G_f.

2.1 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion *f* eine Polstelle besitzt. **/4**
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion *f* in der Umgebung der Polstelle.
Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von *f* an.

2.2 Berechnen Sie alle Schnittpunkte des Graphen der Funktion *f* mit den Koordinatenachsen. **/2**

2.3 Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen der Funktion *f* im Unendlichen. **/5**
Bestimmen Sie die Gleichung *a* der Asymptote von G_f .

2.4 Zeigen Sie, dass $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x - 16}{(2x + 2)^2}$ die Gleichung der ersten Ableitung von *f* ist. **/3**

2.5 Bestimmen Sie rechnerisch die Lage und Art der Extrempunkte der Funktion *f*. **/6**
[Hinweis: Ohne Herleitung dürfen Sie verwenden: $f''(x) = \dfrac{72}{(2x+2)^3}$ *.]*

2.6 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/6**

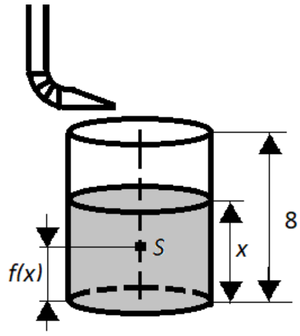
x	-8	-6	-3	-2	1	4	6	8
***f*(*x*)**	-5,1		-4,3		2,3		3,1	

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion *f* im Intervall $-8 \leq x \leq 8$ in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**.

Zeichnen Sie auch die Asymptote *a* ein.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Im Folgenden soll nun der Sachzusammenhang betrachtet werden:
Eine Regentonne hat die Form eines geraden Zylinders.
Die Lage des gemeinsamen Schwerpunktes *S* von der Tonne und dem darin befindlichen Regenwasser hängt von der Füllhöhe *x* des Wassers über dem Boden der Tonne ab.
Ist die Regentonne vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe $x = 8$ dm.



Abbildung

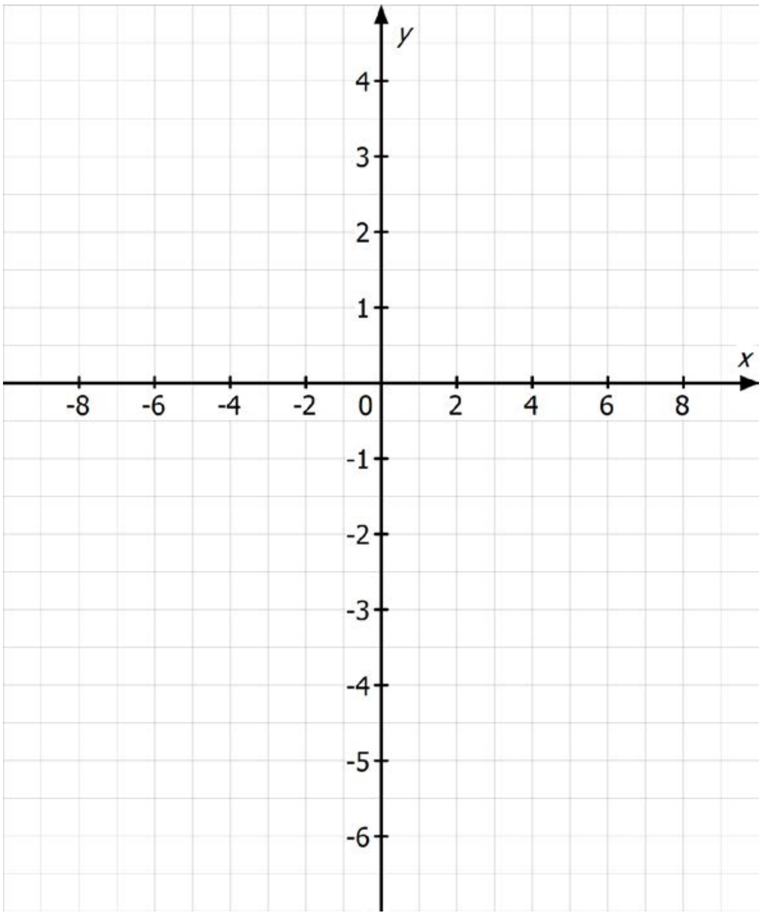
Die bisher betrachtete Funktion *f* gibt für $0 \le x \le 8$ die Höhe des Schwerpunktes *S* über dem Boden in Dezimetern an. Dabei ist *x* die Füllhöhe in Dezimetern (siehe Abbildung).

2.7 Vergleichen Sie $f(0)$ und $f(8)$.
Interpretieren Sie beide Ergebnisse im Sachzusammenhang. **/2**

2.8 Die anfänglich leere Regentonne füllt sich langsam mit Regenwasser, bis die maximale Füllhöhe von 8 dm erreicht ist.
Beschreiben Sie mithilfe Ihres Graphen G_f die Bewegung des Schwerpunktes *S* während des Füllvorgangs.
Erläutern Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Punktes $P(2\,|\,2)$. **/2**

2.9 Ermitteln Sie rechnerisch den Bereich der Füllhöhe *x*, bei der der Schwerpunkt *S* höchstens 2,4 dm hoch ist. **/3**

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.6



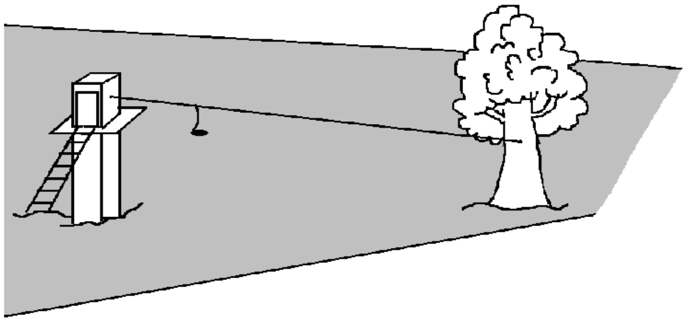
3 Analytische Geometrie /33

Für ein Kinderfest wird auf einem Hang ein Bereich zwischen drei Punkten abgesteckt. In einem Koordinatensystem haben diese Punkte die Koordinaten $A(0\,|\,0\,|\,2{,}7)$, $B(60\,|\,70\,|\,4{,}2)$ und $C(-30\,|\,90\,|\,4{,}7)$. Die Punkte *A*, *B* und *C* liegen in der Ebene *E*.
Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter.

3.1 Stellen Sie für die Ebene *E* sowohl eine Gleichung in Parameterform als auch eine Gleichung in Koordinatenform auf. **/6**
[*Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist E:* $5x - 165y + 7500z = 20250$]

3.2 Untersuchen Sie, ob das Dreieck *ABC* annähernd gleichschenklig ist. **/5**

Auf dem Hang wird eine Seilrutsche für Kinder aufgebaut (siehe Abbildung). Das dafür benötigte Stahlseil wird zwischen einem Kletterturm und einem Baum in den Punkten $P_K(42\,|\,74\,|\,7{,}4)$ und $P_B(12\,|\,64\,|\,5{,}2)$ befestigt.
[Hinweis: Das gespannte Seil kann als Gerade betrachtet werden.]



Abbildung

3.3 Untersuchen Sie rechnerisch, ob das Stahlseil parallel zur Ebene *E* verläuft. **/8**

Ermitteln Sie den Winkel α, den das Stahlseil gegenüber der *x*-*y*-Ebene besitzt.

Geben Sie auch das daraus resultierende Gefälle des Stahlseiles gegenüber der *x*-*y*-Ebene in Prozent an.

3.4 Um einen Aufprall an dem Baum zu verhindern, befindet sich am Stahlseil eine Abbremsvorrichtung im Punkt $S(18\,|\,66\,|\,5{,}64)$. **/4**

Berechnen Sie den Abstand des Punktes *S* zur Ebene *E*.

Der Veranstalter des Kinderfestes plant, im Punkt $M(27\,|\,69\,|\,4{,}0)$ einen 8 m hohen Mast mit seinem Logo aufzustellen. Der Mast soll senkrecht zur *x*-*y*-Ebene stehen.

3.5 Untersuchen Sie, ob sich der Mast und die Seilrutsche berühren würden. **/5**

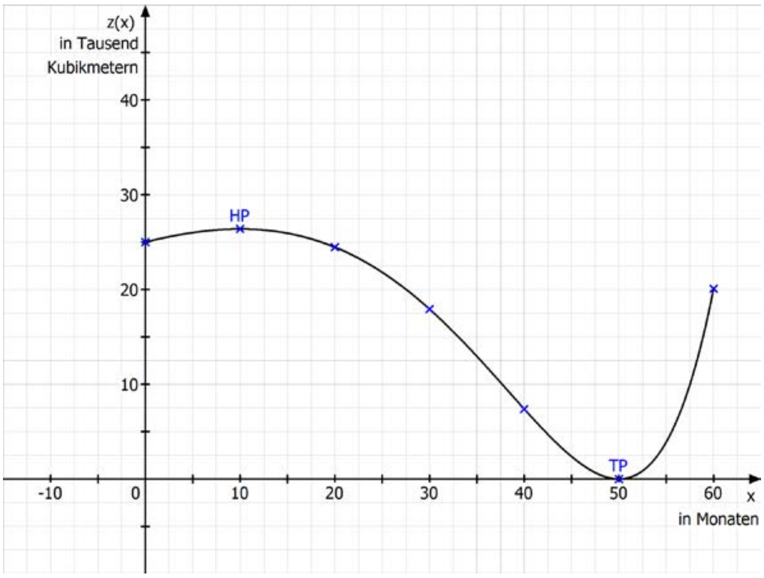
3.6 Zeigen Sie, dass der Punkt *M* nicht in der Ebene *E* liegt. **/5**

Untersuchen Sie, ob der Punkt *M* unterhalb oder oberhalb der Ebene *E* liegt.

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2021
Mathematik

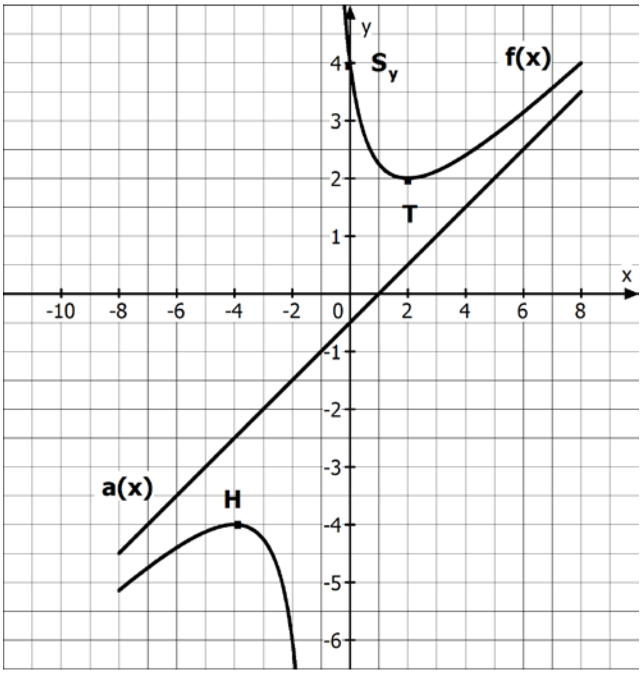
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
1.1	$z(x)=0$ $(0{,}01x^2-x+25)\underbrace{e^{0{,}05x}}_{\text{wird nie Null}}=0$ $0{,}01x^2-x+25=0$ $x^2-100x+2500=0$ $x=50$ Im 50. Monat nach Beginn der Beobachtung läuft kein Wasser im Stausee hinzu.	4		2
1.2	$z'(x)=(0{,}02x-1)e^{0{,}05}+0{,}05\left(0{,}01x^2-x+25\right)e^{0{,}05x}$ $=\left(0{,}0005x^2-0{,}03x+0{,}25\right)e^{0{,}05x}$		3	
1.3	$z'(x)=0$ $0=\left(0{,}0005x^2-0{,}03x+0{,}25\right)\underbrace{e^{0{,}05x}}_{\text{wird nie Null}}$ $0=0{,}0005x^2-0{,}03x+0{,}25$ $0=x^2-60x+500$ $x_{1/2}=30\pm\sqrt{900-500}$ $x_1=10$ $x_2=50$ $z''(10)<0\Rightarrow$ Maximum $z''(50)>0\Rightarrow$ Minimum $z(10)\approx 26{,}38$ Im 10. Monat läuft die maximale Wassermenge von etwa 26.380 Kubikmetern Wasser hinzu.	4	4	
1.4	$z''(x)=0$ $0=(0{,}000025x^2-0{,}0005x-0{,}0175)\underbrace{e^{0{,}05x}}_{\text{wird nie Null}}$ $0=0{,}000025x^2-0{,}0005x-0{,}0175$ $0=x^2-20x-700$ $x_{1/2}=10\pm\sqrt{100+700}$ $x_1\approx 38{,}28$ $x_2\approx -18{,}28$ entfällt Der Zulauf nimmt nach Ablauf des 38. Monat, d.h. im 39. Monat, am stärksten ab.		5	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.5</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td></tr>
<tr><td>z(x)</td><td>25</td><td>26,38</td><td>24,46</td><td>17,93</td><td>7,39</td><td>0</td><td>20,09</td></tr>
</table>


</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>
$Z'(x) = \left(0,2x^2 - 28x + 1060\right)e^{0,05x}$
$\quad = (0,4x - 28)e^{0,05x} + 0,05\left(0,2x^2 - 28x + 1060\right)e^{0,05x}$
$\quad = \left(0,01x^2 - x + 25\right)e^{0,05x}$
$\quad = z(x)$
$Z(0) = 1060$
$Z(12) = 1371,69$
$\int_0^{12} z(x)dx = Z(12) - Z(0) = 311,69$
Es fließen im ersten Jahr 311.690 Kubikmeter Wasser hinzu.
</td><td></td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>10</td><td>18</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">34</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.1	Polstelle: $N(x)=0$ und $Z(x)\neq 0$ $N(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 2x+2=0 \;\Leftrightarrow\; x=-1$ $Z(-1)=9\neq 0 \;\Rightarrow$ es gibt eine Polstelle. Verhalten an der Polstelle $x=-1$ (Testeinsetzungen): VZW von - nach + $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	1 2 1		
2.2	Schnittpunkt mit *x*-Achse: $f(x_0)=0 \;\Rightarrow\; 0=x_0^{\;2}+8 \;\Rightarrow$ nicht lösbar $\Rightarrow\; S_x$ existiert nicht Schnittpunkt mit *y*-Achse: $f(0)=4 \;\Rightarrow\; S_y(0\vert 4)$	 1 1		
2.3	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ Polynomdivision: $(x^2+8):(2x+2)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{9}{2x+2}$ $\underline{x^2+x}$ $-x+8$ $\underline{-x-1}$ 9 $\Rightarrow \quad a(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$	2	3	
2.4	$f'(x)=\frac{2x\cdot(2x+2)-2\cdot\left(x^2+8\right)}{(2x+2)^2}=\frac{4x^2+4x-2x^2-16}{(2x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-16}{(2x+2)^2}$		3	
2.5	$f'(x_E)=0 \;\Rightarrow\; 2x^2+4x-16=0 \;\Rightarrow\; x^2+2x-8=0$ $\Rightarrow x_1=2$ und $f''(2)>0 \Rightarrow T\left(2\vert 2\right)$ $\Rightarrow x_2=-4$ und $f''(-4)<0 \Rightarrow H\left(-4\vert -4\right)$		6	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.6</td><td>Ergänzung der Wertetabelle:
<table>
<tr><td>x</td><td>-8</td><td>-6</td><td>-3</td><td>-2</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>-5,1</td><td>-4,4</td><td>-4,3</td><td>-6,0</td><td>2,3</td><td>2,4</td><td>3,1</td><td>4,0</td></tr>
</table>


</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.7</td><td>$f(0)=f(8)=4$
Der Schwerpunkt S befindet sich sowohl bei dem leeren als auch bei dem vollständig gefüllten Gefäß in derselben Höhe von 4 dm.
[Auch Alternativaussagen sind möglich.]</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>2.8</td><td>Bis zu einer Füllhöhe von 2 dm sinkt der Schwerpunkt S in Richtung Gefäßboden, danach steigt er wieder an.
Bei einer Füllhöhe von 2 dm liegt der Schwerpunkt S genau auf der Wasseroberfläche.
[Auch Alternativaussagen sind möglich.]</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>2.9</td><td>$2,4=f(x) \quad \Rightarrow 2,4=\dfrac{x^2+8}{2x+2}$
$\Rightarrow \quad 4,8x+4,8=x^2+8$
$\Leftrightarrow \; x^2-4,8x+3,2=0$
$\Rightarrow \; x_1=4$ und $x_2=0,8$
Bei einer Füllhöhe von mindestens 0,8 dm bis maximal 4,0 dm liegt der Schwerpunkt S höchstens 2,4 dm über dem Gefäßboden.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>10</td><td>16</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.1	$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -30 \\ 90 \\ 2{,}0 \end{pmatrix}$	2		
	Normalenvektor: $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -30 \\ 90 \\ 2{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -165 \\ 7500 \end{pmatrix}$, somit gilt: $E\colon 5x - 165y + 7500z = d$ Einsetzen der Koordinaten liefert: $d = 20250$. $E\colon 5x - 165y + 7500z = 20250$		4	
3.2	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -30 \\ 90 \\ 2{,}0 \end{pmatrix}$ (aus 3.1) und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -90 \\ 20 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$	1		
	$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{8502{,}25} \approx 92{,}2$ LE, entspricht 92,2 m $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{9004} \approx 94{,}9$ LE, entspricht 94,9 m $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{8500{,}25} \approx 92{,}2$ LE, entspricht 92,2 m	3		
	Das Dreieck *ABC* ist nahezu gleichschenklig.	1		
3.3	Parallelitätsbedingung: $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P_K P_B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -165 \\ 7500 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -30 \\ -10 \\ -2{,}2 \end{pmatrix} = -15000 \neq 0$ Das Stahlseil verläuft <u>nicht</u> parallel zur Ebene *E*.		3	
	Bestimmung des Winkels zwischen Stahlseil und *x*-*y*-Ebene: $\sin\alpha = \frac{\left\|\overrightarrow{P_K P_B} \circ \overrightarrow{n_{xy}}\right\|}{\left\|\overrightarrow{P_K P_B}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{n_{xy}}\right\|} = \frac{2{,}2}{31{,}7 \cdot 1} = 0{,}0694 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 4^\circ$		4	
	Bestimmung des Gefälles des Stahlseiles: $\tan\alpha \approx 0{,}0699 \quad \Rightarrow \quad 7\,\%$			1
3.4	Abstand des Punktes *S*(18 | 66 | 5,64) zur Ebene *E*: $d = \left\| \frac{20250 - (5 \cdot 18 - 165 \cdot 66 + 7500 \cdot 5{,}64)}{7502} \right\| = \frac{11250}{7502} \approx 1{,}5$ LE $d \approx 1{,}5$ LE, entspricht 1,5 m Der Abstand von Punkt *S* zur Ebene *E* beträgt 1,5 m.		4	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.5	Aufstellen der Geradengleichung für die Seilrutsche und den Mast: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 42 \\ 74 \\ 7{,}4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -30 \\ -10 \\ -2{,}2 \end{pmatrix}$ $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 27 \\ 69 \\ 4{,}0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Die Untersuchung der Lagebeziehung zwischen *g* und *h* ergibt eine eindeutige Lösung mit $u = 0{,}5$ und $v = 2{,}3$. Der Mast würde die Seilrutsche berühren, da $0 \le u \le 1$ und $0 \le v \le 8$ gilt.	2	2	1
3.6	Punkt *M* in *E* einsetzen: $E\colon 5 \cdot 27 - 165 \cdot 69 + 7500 \cdot 4{,}0 = 18750 \neq 20250$ *M* liegt nicht in *E*. M^* mit $M^*(27 \mid 69 \mid z)$ sei ein Punkt der Ebene *E*: $E\colon 5 \cdot 27 - 165 \cdot 69 + 7500 \cdot z = 20250 \Rightarrow z = 4{,}2$ Da die *z*-Koordinate von M^* größer ist als die *z*-Koordinate von *M*, liegt *M* unterhalb der Ebene *E*.	1		4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**10**	**17**	**6**
	Summe der BE	**33**		

Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule im Schuljahr 2020/2021

Fach	**Mathematik (B)**
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	**27. Mai 2021**
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	**Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt zu den Wahlmöglichkeiten.**
Erwartungshorizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	**Soll**
1	34
2	33
3	33
Summe[1]:	Je nach Wahl 67 oder 66

[1] Jeder Prüfling bearbeitet nur zwei Aufgaben.

Aufgabenvorschlag B

1 Exponentialfunktion /34

In einem Museum wird die Anzahl an Besuchern während eines Tages ermittelt.
Die Anzahl an Besuchern lässt sich für einen bestimmten Tag durch die Funktion *B* mit der Gleichung

$$B(t) = t^3 \cdot (8 - t) \cdot e^{-t} = (8t^3 - t^4) \cdot e^{-t}$$

beschreiben. Dabei gibt *t* die Anzahl der Stunden ab 10 Uhr an und *B*(*t*) die Anzahl der Besucher in 100.
Der Graph der Funktion ist G_B.

1.1 Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion *B*. **/4**
Interpretieren Sie die Nullstellen im Sachzusammenhang.

1.2 Zeigen Sie, dass $B'(t) = t^2 \cdot (t^2 - 12t + 24) \cdot e^{-t}$ die Gleichung der ersten Ableitung der Funktion *B* ist. **/4**

1.3 Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Anzahl an Besuchern am höchsten war. Geben Sie auch die Anzahl der Besucher an, die sich zu diesem Zeitpunkt im Museum befanden. **/9**
[*Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden:* $B''(t) = -t \cdot (t^3 - 16t^2 + 60t - 48) \cdot e^{-t}$.]

1.4 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/6**

t	0,5	1	2	3	4	5	6	7
$B(t)$		2,58		6,72	4,69		1,07	

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion *B* im Intervall $0 \le t \le 8$ in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**.

1.5 Ein Mitarbeiter des Museums stellt während seiner Aufsicht von 10 Uhr bis 18 Uhr fest, dass um 14 Uhr die Besucherzahlen am stärksten sanken. **/11**

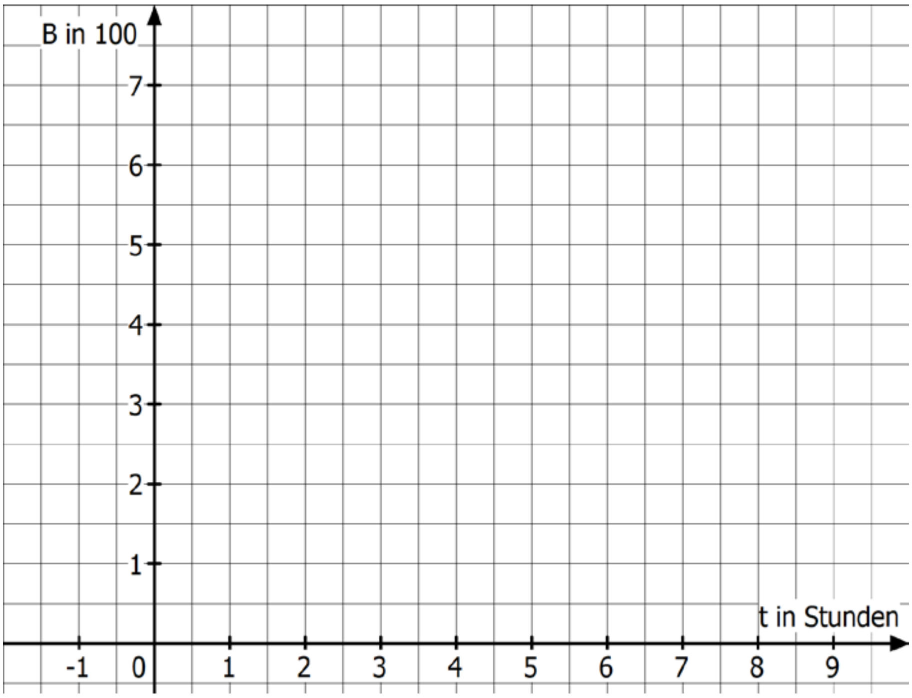
Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die Anzahl an Besuchern am stärksten gestiegen ist.

Berechnen Sie die Größe des Anstiegs der Anzahl an Besuchern zu diesem Zeitpunkt.

[*Ein Nachweis mit Hilfe der dritten Ableitung oder des Vorzeichenwechselkriteriums ist nicht erforderlich.*]

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = \dfrac{15}{x^2+5}$. Der Graph der Funktion sei G_f.

2.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von *f*. /4
Untersuchen Sie den Graphen von *f* auf Symmetrie.

2.2 Berechnen Sie den Schnittpunkt des Graphen der Funktion *f* mit der *y*-Achse. /3
Weisen Sie nach, dass *f* keine Nullstellen besitzt.

2.3 Berechnen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f. /7

[*Hinweis: Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden* $f''(x) = \dfrac{90x^2 - 150}{(x^2+5)^3}$.]

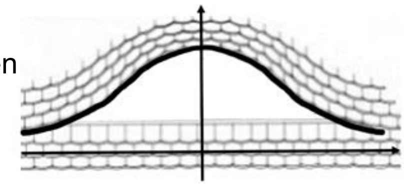
2.4 Ergänzen Sie die Wertetabelle. /5

x	0	0,5	1	1,5	2	3	4
$f(x)$				2,07	1,67		

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer oben berechneten Ergebnisse und der Wertetabelle den Graphen von *f* im Intervall $[-4\,|\,4]$ in das **Koordinatensystem auf der folgenden Seite** ein.

Im Folgenden soll diese Funktion im Sachzusammenhang betrachtet werden:

Beim Dachausbau eines Hauses wird eine Dachgaube eingebaut.
Die Funktion *f* beschreibt in guter Näherung den Verlauf des oberen Randes der Dachgaube (siehe Abbildung).
Der Fußboden im Dach soll in der Höhe der *x*-Achse liegen,
1 Längeneinheit entspricht 1 m.



2.5 In der Höhe von 2 m über dem Fußboden wird im Fensterrahmen ein Balken *g* eingezogen, der parallel zum Fußboden ist. Die Fläche zwischen dem Balken und dem oberen Rand der Gaube soll in einem Stück verglast werden. Die Dicke des Fensterrahmens wird vernachlässigt. /2
Zeichnen Sie den Balken in das Koordinatensystem ein und markieren Sie die Fläche, die verglast werden soll.

2.6 Ermitteln Sie, in welchem Bereich der obere Rand des Fensterrahmens mehr als 2 m über dem Fußboden des Dachraums liegt. /3

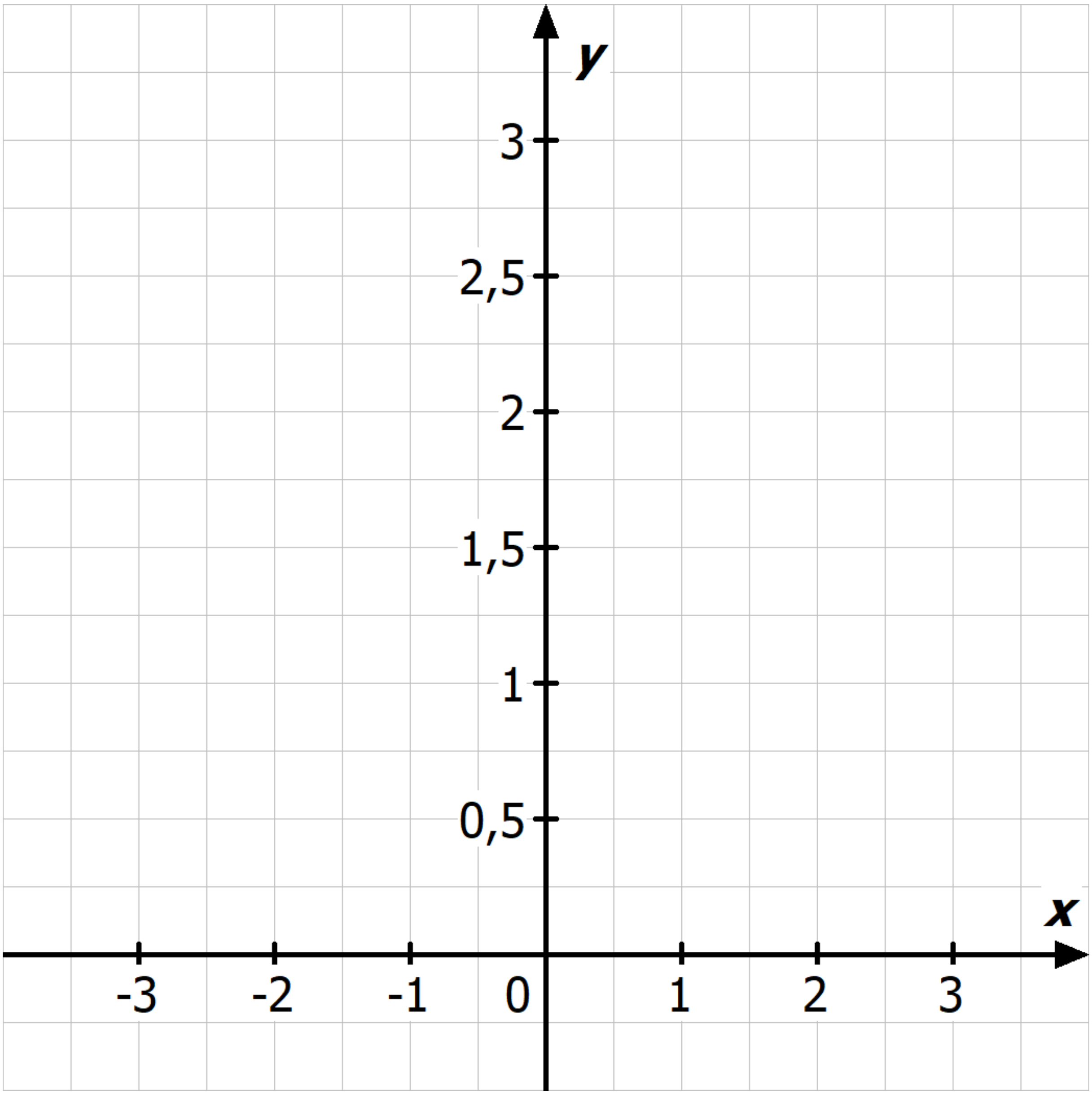
Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Um den Flächeninhalt der Fläche, die verglast werden soll, näherungsweise zu ermitteln, soll eine Parabel *p* verwendet werden, die die gleichen Schnittpunkte mit dem Balken *g* hat wie *f*.

2.7 Zeichnen Sie die Parabel *p* mit $p(x) = -0{,}4x^2 + 3$ in das Koordinatensystem ein. **/4**
Zeigen Sie, dass die Schnittstellen der Graphen von *f* und *p* mit Hilfe der Gleichung $0 = -0{,}4x^4 + x^2$ ermittelt werden können.
[Hinweis: Die Schnittstellen selbst müssen nicht noch einmal ermittelt werden.]

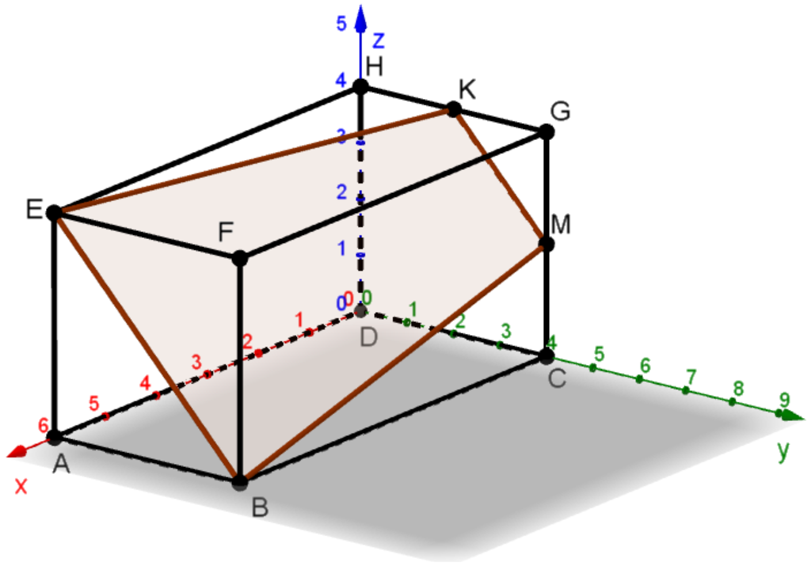
2.8 Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die verglast werden soll. Nutzen Sie dazu die Parabel *p*. **/5**
[*Hinweis: Sollten Sie Aufgabe 2.6 nicht bearbeitet haben, lesen Sie die Intervallgrenzen aus der Zeichnung ab.*]

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.4 , 2.6 und 2.7:



3 Analytische Geometrie /33

Ein Quader *ABCDEFGH* hat die Kantenlänge $\overline{DA} = 6$ cm, $\overline{DC} = 4$ cm und $\overline{DH} = 4$ cm.
M ist der Mittelpunkt der Kante $\overline{CG}$.



3.1 Die Ebene *T* verläuft durch die Punkte *E*, *B* und *M*. /7
Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene *T* in Parameterform und Koordinatenform.
[*Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist* $T: x + 3y + 3z = 18$.]

3.2 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Mittelpunkt *K* der Kante $\overline{GH}$ ein Punkt der Ebene *T* ist. /2

3.3 Die Raumdiagonale $\overline{DF}$ liegt auf der Geraden *d.* /2

Weisen Sie nach, dass $d: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Gleichung der Geraden *d* ist.

3.4 Zeigen Sie, dass $S(3{,}6|2{,}4|2{,}4)$ der Schnittpunkt der Raumdiagonale $\overline{DF}$ und der Ebene *T* ist. /8

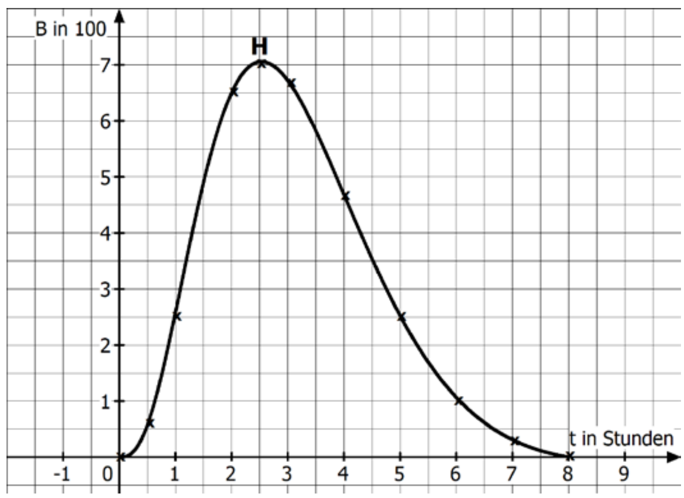
Untersuchen Sie, ob *S* gleichzeitig der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{EM}$ und $\overline{BK}$ des Vierecks *BMKE* ist.

3.5 Berechnen Sie im Viereck *BMKE* den Innenwinkel β im Punkt *B.* /3

3.6 Begründen Sie, dass das Viereck *BMKE* ein Trapez ist. /3

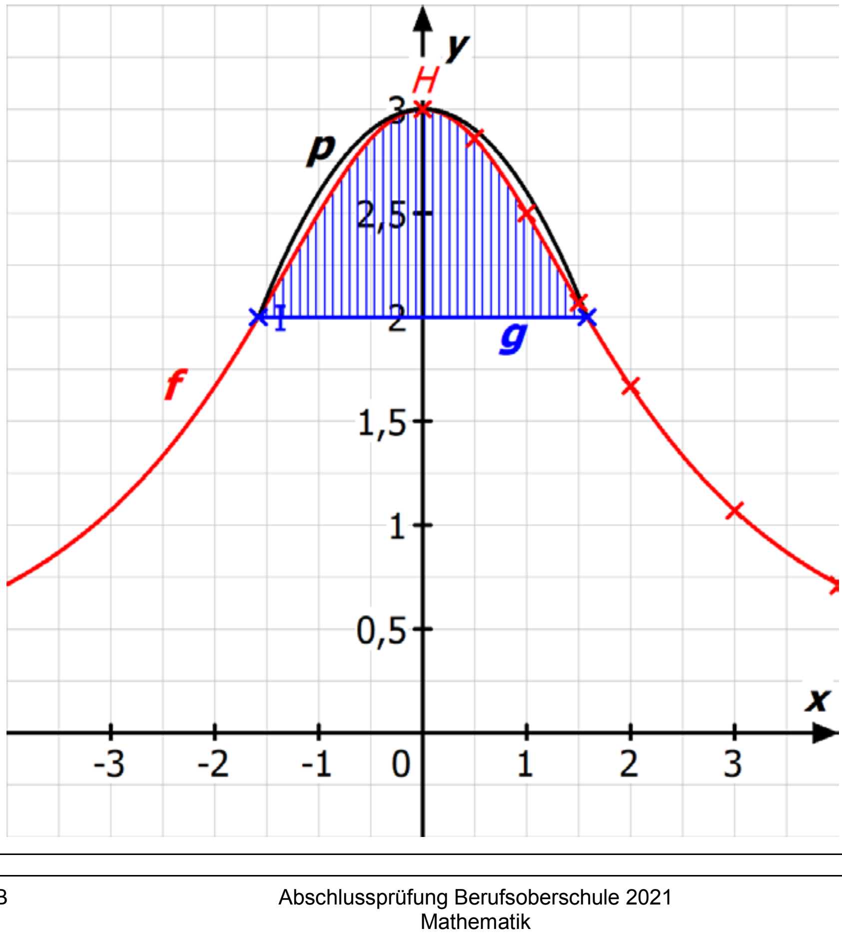
3.7 Der Punkt $P(6|1|3)$ liegt auf der Strecke $\overline{EB}$. /3
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gerade durch die Punkte *P* und *K* senkrecht zur Strecke $\overline{EB}$ verläuft.

3.8 Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Trapezes *BMKE.* /5

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$B(t_0)=0 \Rightarrow 0=t^3\cdot(8-t)\cdot\underbrace{e^{-t}}_{\text{wird nie Null}} \Rightarrow t_{01}=0$ und $t_{02}=8$
Um 10 Uhr und um 18 Uhr befinden sich keine Besucher im Museum.</td><td>2
2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Aus $B(t)=(8t^3-t^4)\cdot e^{-t}$ ergibt sich
$B'(t)=\left(24t^2-4t^3\right)\cdot e^{-t}+\left(8t^3-t^4\right)\cdot\left(-e^{-t}\right)=e^{-t}\cdot\left(t^4-12t^3+24t^2\right)$
$=t^2\cdot\left(t^2-12t+24\right)\cdot e^{-t}$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$B'(t_E)=0 \Rightarrow t^2\cdot\left(t^2-12t+24\right)\cdot\underbrace{e^{-t}}_{\text{wird nie Null}}=0 \Rightarrow t_1=0$ entfällt, da $B(0)=0$
Aus $t^2-12t+24=0 \Rightarrow t_{2,3}=6\pm\sqrt{36-24}$
$\Rightarrow t_2\approx 9{,}46$ und $B''(9{,}46)>0 \Rightarrow$ entfällt
$\Rightarrow t_3\approx 2{,}54$ und $B''(2{,}54)<0 \Rightarrow B(2{,}54\,|\,7{,}06)$
Um 12:32 Uhr befanden sich ca. 706 Besucher im Museum.
Alternative Zeit- und Besucherangaben entsprechend der gewählten Rundung von t_3 sind zulässig.</td><td></td><td>9</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>Ergänzung der Wertetabelle:
<table>
<tr><td>t</td><td>0,5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$B(t)$</td><td>0,57</td><td>2,58</td><td>6,50</td><td>6,72</td><td>4,69</td><td>2,53</td><td>1,07</td><td>0,31</td></tr>
</table>

</td><td>2

4</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.5	$B''(t) = 0 \Rightarrow 0 = -t \cdot (t^3 - 16t^2 + 60t - 48) \cdot \underbrace{e^{-t}}_{\text{wird nie Null}}$ $\Rightarrow t_1 = 0 \Rightarrow$ entfällt, da $B'(0) = 0$ (vgl. 1.3)		3	
	Nach Polynomdivision oder Hornerschema mit $t_2 = 4$ (vgl. Aufgaben-stellung) ergibt sich $t^3 - 16t^2 + 60t - 48 = (t - 4) \cdot (t^2 - 12t + 12)$			3
	$\Rightarrow t_{3/4} = 6 \pm \sqrt{36 - 12}$ $\Rightarrow t_3 \approx 10{,}90 \Rightarrow$ entfällt, da außerhalb der Öffnungszeiten $\Rightarrow t_4 \approx 1{,}10$			4
	$\Rightarrow B'(1{,}10) = 4{,}84$ Um 11:06 Uhr nimmt die Besucherzahl am stärksten mit 484 Besuchern/Stunde zu. Alternative Angaben entsprechend der gewählten Rundung von t_4 sind zulässig.			1
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**10**	**16**	**8**
	Summe der BE		**34**	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>$N(x) = x^2 + 5 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$
$f(-x) = \frac{15}{(-x)^2 + 5} = \frac{15}{x^2 + 5} = f(x) \Rightarrow$ der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.</td><td>2
2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>$S_y:\ f(0) = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow S_y(0\,|\,3)$
$Z(x) = 15 \neq 0 \Rightarrow$ Der Funktionswert kann niemals Null werden, es gibt keine Nullstellen.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>1. Ableitung:
$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2+5) - 15 \cdot 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{-30x}{(x^2+5)^2}$$
Extrempunkt:
$$f'(x) = 0$$
$$-30x = 0$$
$$x = 0$$
$$f''(0) = \frac{-150}{125} < 0 \Rightarrow \text{es liegt ein Maximum vor.} \Rightarrow H(0\,|\,3)$$</td><td></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>0</th><th>0,5</th><th>1</th><th>1,5</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>3,00</td><td>2,86</td><td>2,50</td><td>2,07</td><td>1,67</td><td>1,07</td><td>0,71</td></tr>
</table>


</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.5	Siehe Abbildung zu 2.4: Strecke *g* und blaue Markierung		2	
2.6	$f(x) > 2$ $\frac{15}{x^2+5} = 2$ $15 = 2(x^2+5)$ $x^2 = 2{,}5$ $x_{1/2} \approx \pm 1{,}58$ Im Bereich -1,58 m < x < +1,58 m ist der Fensterrahmen höher als 2 m über dem Fußboden.		3	
2.7	Zeichnung: Siehe Abbildung zu 2.4: Parabel *p* Ansatz für Schnittstellenberechnung $f(x) = p(x)$ führt zu: $f(x) = p(x)$ $\frac{15}{x^2+5} = -0{,}4x^2 + 3$ $15 = \left(-0{,}4x^2+3\right)\cdot\left(x^2+5\right)$ $15 = -0{,}4x^4 + 3x^2 - 2x^2 + 15$ $0 = -0{,}4x^4 + x^2$ Gleichung nachgewiesen		1	3
2.8	Ermittlung der Intervallgrenzen $A = \int_{-1{,}58}^{+1{,}58} \left(p(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x = \int_{-1{,}58}^{+1{,}58} \left(-0{,}4x^2 + 1\right) \mathrm{d}x$ $= \left[-\frac{2}{15}x^3 + x\right]_{-1{,}58}^{+1{,}58} = \frac{\sqrt{10}}{3} - \left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right) \approx 2{,}11\,\text{FE}$ Der Inhalt der zu verglasenden Fläche beträgt ca. 2,11 m². [*Hinweis: Das Ablesen der Intervallgrenzen aus der Zeichnung ist möglich.*]		1 4	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**9**	**21**	**3**
	Summe der BE		**33**	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.1	Richtungsvektoren und Normalenvektor der Ebene: $\overrightarrow{BE}=\begin{pmatrix}6-6\\0-4\\4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix}0-6\\4-4\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix}$ Ebenengleichung in Parameterform: $T:\ \vec{x}=\overrightarrow{OB}+r\cdot\overrightarrow{BE}+s\cdot\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix}6\\0\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix}$ Ebenengleichung in Koordinatenform: $\vec{n}=\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BM}=-8\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ $\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}$ $T: x+3y+3z=18$	3	4	
3.2	Punktprobe für $K(0\|2\|4)$: $T: 1\cdot 0+3\cdot 2+3\cdot 4=6+12=18$ *K* liegt in der Ebene *T*.	2		
3.3	$d:\vec{x}=\overrightarrow{OD}+t\cdot\overrightarrow{DF}=t\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix}$ Der Stützvektor entfällt, da die Diagonale durch den Ursprung verläuft. Der Richtungsvektor ist $\overrightarrow{DF}$.		2	
3.4	*d* in die Koordinatenform von *T* einsetzen: $6t+12t+12t=18$ $t=0{,}6$ $\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}3{,}6\\2{,}4\\2{,}4\end{pmatrix}$ $S(3{,}6\|2{,}4\|2{,}4)$	3		

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
	Prüfen, ob S auch Schnittpunkt der Diagonalen ist: $d_{EM}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 2{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} I)\ 3{,}6 = 6 + 6t & I)\ t = -0{,}4 \\ II)\ 2{,}4 = -4t & II)\ t = -0{,}6 \\ III)\ 2{,}4 = 4 + 2t & III)\ t = -0{,}8 \end{matrix}$ Der Punkt *S* liegt nicht auf der Geraden $\overline{EM}$ und kann damit auch nicht der Schnittpunkt der Diagonalen sein. [*Hinweis: Alternative Lösungen sind möglich.*]		5	
3.5	$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BM}}{\lvert\overrightarrow{BE}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{BM}\rvert} = \frac{8}{\sqrt{32}\sqrt{40}}$ $\beta = 77{,}08°$		3	
3.6	$\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Die Strecken $\overline{KM}$ und $\overline{EB}$ sind parallel zueinander, da offensichtlich die Vektoren $\overrightarrow{EB}$ und $\overrightarrow{KM}$ linear abhängig sind. Damit ist das Viereck *BMKE* ein Trapez. [*Alternative Begründungen sind ebenfalls möglich.*]			3
3.7	$\overrightarrow{PK} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$, also steht die Gerade durch die Punkte *P* und *K* senkrecht zur Strecke $\overline{EB}$.		3	
3.8	$\lvert\overrightarrow{EB}\rvert = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$ (in 3.5 berechnet) $\lvert\overrightarrow{KM}\rvert = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ $\lvert\overrightarrow{PK}\rvert = \sqrt{(-6)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{38}$ $A = \frac{1}{2}\left(\lvert\overrightarrow{EB}\rvert + \lvert\overrightarrow{KM}\rvert\right) \cdot \lvert\overrightarrow{PK}\rvert = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{8} + \sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{38} = 6\sqrt{19} \approx 26{,}15\ \text{cm}^2$ [*Alternative Vorgehensweisen sind ebenfalls möglich.*]			5
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**8**	**17**	**8**
	Summe der BE		**33**	